Равномерные резольвентные оценки

Андрей Комеч

11 декабря 2024

Напомним общую картину. Рассматривается замкнутый оператор в Банаховом пространстве. Норма его резольвенты, разумеется, неограниченно растёт при приближении к существенному спектру, но резольвента может иметь предел как оператор в некоторых вспомогательных пространствах; тогда мы говорим, что в данной точке существенного спектра резольвента удовлетворяет в этих пространствах *принципу предельного поглощения* (ППП). При добавлении к оператору относительно компактного возмущения резольвента либо будет удовлетворять *тому же* ППП (в той же точке, в тех же пространствах), либо нет; в последнем случае мы говорим, что у получившегося оператора в данной точке – *виртуальный уровень*.

А в каких именно пространствах? Вопрос, на который долго не было ответа (несмотря на работу [A. Jensen, G. Nenciu 2000]) – в каких пространствах будет выполняться ППП в пороговой точке $z = 0$ для оператора Шрёдингера на плоскости. (Мы берём, скажем, компактный положительный потенциал, чтобы устранить виртуальный уровень лапласиана в нуле.) Можно взять сферически симметричный потенциал и свести задачу к радиальному случаю, но так мы не справимся, например, с дискретным лапласианом (хотя и вспомним асимптотики функций Ханкеля).

Предлагаемый подход связан с идеей перенаправлять ядро оператора напрямую в коядро [Гохберг–Крейн 1957?]. В нашем контексте получается так: если оператор не удовлетворяет ППП (в некоторой точке, в некоторых пространствах), а его ограничение на подпространство конечной коразмерности – удовлетворяет, то при некотором компактном возмущении оператор будет удовлетворять ППП уже и без ограничения на подпространство. Например, $(-\partial_x^2 - zI)^{-1} \rightsquigarrow (2\sqrt{-z})^{-1}e^{-\sqrt{-z}|x-y|} \sim \frac{1}{2\sqrt{-z}} - \frac{|x-y|}{2} + \dots$ означает, что у $-\partial_x^2$ в $L^2(\mathbb{R})$ – виртуальный уровень в нуле. Ограничим резольвенту на подпространство функций с нулевым средним, чтобы можно было забыть про сингулярный член в разложении, и посчитать, в каких пространствах свёртка с $|x|$ будет ограничена. В тех же пространствах ППП выполнен в пороговой точке и для оператора Шрёдингера на прямой (если потенциал выбран так, чтобы не было виртуального уровня в нуле). На плоскости $(-\Delta - zI)^{-1} \rightsquigarrow -(2\pi)^{-1}\ln\sqrt{z} - (2\pi)^{-1}\ln|x-y|$, $x,\, y \in \mathbb{R}^2$; опять берём подпространство функций с нулевым средним, выкидываем $\ln\sqrt{z}$ и считаем, в каких пространствах ограничена свёртка с $\ln|x|$ – это и будут пространства, в которых ППП выполнен в пороговой точке для оператора Шрёдингера на плоскости.

Free bonus. Всегда ли наличие виртуального уровня можно "обойти", ограничив резольвенту на подпространство конечной коразмерности? (Нет.) Всегда ли виртуальные состояния оператора Шрёдингера в $L^2(\mathbb{R}^d)$, $d \le 2$, равномерно ограничены? (Нет.)

Доклад основан на совместной работе с Набилем Буссаидом (Безансон).