ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

ЕН.Ф.03. Высшая математика
Базовый поток

Направление 010600 – Прикладные математика и физика,
Направление 010700 – Физика,
Направление 010800 – радиофизика

Правила проведения коллоквиумов и экзаменов. Правила выставления итоговой семестровой оценки.

Отчетность по курсу в каждом семестре состоит из отчетности по упражнениям, по коллоквиуму и итоговой семестровой оценки (финальной оценки). Финальная оценка определяется результатами работы на упражнениях, коллоквиуме и экзамене и формируется как сумма с соответствующими весами болонских оценок по контрольным занятиям, коллоквиуму и собственно экзамену. Учет контрольных в итоговой семестровой оценке обязателен для учета качества усвоения материала за семестр.

Работа на практических занятиях по результатам контрольных оценивается болонской оценкой. Удовлетворительное освоение материала практических занятий оформляется в конце семестра "зачетом". Студенты, не получившие зачета, к экзамену не допускаются.

Для студентов, набравших на практике 2 болонских балла и выше переписывания контрольных не устраиваются. Для остальных студентов преподаватель устраивает переписывания по распоряжению деканата. В случае успешного переписывания студент получает ровно 2 болонских балла и зачет. В исключительных случаях допускаются переписывания, если студент пропустил контрольную по уважительной причине; в этом случае переписывание проводится на базе материала пропущенной контрольной.

Коллоквиум и экзамен проводятся в письменной форме. И экзамен, и коллоквиум состоят из двух частей: основной и дополнительной. Цель основной части экзамена (коллоквиума) - контроль умения решать стандартные задачи и знание основных теоретических результатов. Дополнительная часть экзамена (коллоквиума) служит для проверки способности студентов доказывать теоретические результаты и решать нестандартные задачи.

В основную часть коллоквиума входят 2 практические задачи и 2 кратких теоретических вопроса. В основную часть экзамена входят 4 практические задачи и 4 кратких теоретических вопроса.

Без ответов на вопросы дополнительной части экзамена (коллоквиума), максимальная болонская оценка за экзамен (коллоквиум) — 7 болонских баллов.

Ответы на вопросы второй (дополнительной) части экзамена (коллоквиума) проверяются и дают дополнительный вклад в оценку за коллоквиум только при условии успешной сдачи первой (основной) части экзамена (коллоквиума).

На дополнительной части коллоквиума предлагается доказать один из теоретических результатов курса и решить одну задачу повышенной сложности. На дополнительной части экзамена предлагается доказать два из теоретических результатов курса и решить две задачи повышенной сложности.

Материал коллоквиума не выносится на экзамен (за исключением переэкзаменовок).

Финальная оценка - это итоговая оценка, выставляемая в зачетку и в ведомость. Финальная болонская оценка вычисляется по сумме баллов, полученных за работу на семинарах, за коллоквиум и за экзамен. Пересчёт суммарно набранных баллов в финальную болонскую оценку производится по формуле

финальная оценка = 4/13 оценки за семинары+3/13 оценки за коллоквиум +6/13 оценки за экзамен.

3. Содержание дисциплины

3.1. Темы лекций по дисциплине:
3-й семестр (всего 45 часов, в середине семестра коллоквиум, в конце семестра экзамен)

1. Мотивировка определения двойного интеграла: задача о вычислении массы пластины. Определение двойного интеграла, его свойства, сведение двойного интеграла к повторному.
2. Определение тройного интеграла, его свойства, сведение тройного интеграла к повторному. Геометрический и физический смысл кратных интегралов.
3. Понятие непрерывно дифференцируемого отображения. Матрица Якоби, невырожденные отображения. Коэффициент искажения объема, якобиан.
4. Теорема о замене переменных в кратном интеграле. Основные криволинейные координатные системы (полярные, цилиндрические и сферические координаты) и соответствующие случаи замены переменных.
5. Несобственный интеграл от функции, неограниченной в точке. Несобственный интеграл по неограниченному множеству. Достаточные условия сходимости несобственных интегралов в двумерном и трехмерном случаях.
6. Некоторые приложения несобственных интегралов. Интегралы Пуассона и Гаусса. Гамма- и бета- функции Эйлера.
7. Способы задания кривых на плоскости и в пространстве. Понятие гладкой кривой, касательный вектор. Задача о нахождении длины гладкой кривой. Определение криволинейного интеграла первого рода, его свойства. Сведение криволинейного интеграла первого рода к определенному интегралу.
8. Способы задания поверхностей в пространстве. Понятие гладкой поверхности, касательная плоскость, нормаль. Задача о нахождении площади гладкой поверхности.
9. Определение поверхностного интеграла первого рода, его свойства. Сведение поверхностного интеграла первого рода к двойному интегралу. Физический смысл криволинейного и поверхностного интегралов первого рода.
10. Задача о вычислении работы векторного поля. Ориентация кривой. Параметризация кривой, согласованная с ориентацией. Определение криволинейного интеграла второго рода, его свойства. Сведение криволинейного интеграла второго рода к

определенному интегралу. Связь криволинейных интегралов первого и второго рода.

11. Вычисление площади плоской области с помощью криволинейного интеграла второго рода по границе. Положительная ориентация границы плоской области. Формула Грина. Независимость криволинейного интеграла второго рода от пути. Восстановление функции двух переменных по ее дифференциалу.
12. Задача о вычислении потока жидкости через заданную поверхность. Ориентация поверхности. Примеры ориентируемых и неориентируемых поверхностей. Определение поверхностного интеграла второго рода, его свойства. Параметризация поверхности, согласованная с ориентацией. Сведение поверхностного интеграла второго рода к двойному интегралу. Связь поверхностных интегралов первого и второго рода.
13. Вычисление объема тела с помощью поверхностных интегралов второго рода по границе. Положительная ориентация границы трехмерной области. Формула Остроградского-Гаусса. Интеграл Гаусса.
14. Согласованная ориентация поверхности и ее края. Формула Стокса. Независимость криволинейного интеграла второго рода от пути. Восстановление функции трех переменных по ее дифференциалу.
15. Элементы векторного анализа. Градиент, дивергенция и ротор. Оператор Лапласа. Операции векторного анализа в ортогональных криволинейных координатах. Коэффициенты Ламе.
16. Дифференциальные формы. Линейные операции над дифференциальными формами. Внешнее произведение.
17. Внешнее дифференцирование форм. Точные и замкнутые дифференциальные формы. Общая формула Стокса (без доказательства). Классические случаи формулы Стокса (формулы Грина, Стокса и Гаусса-Остроградского).
18. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Их решение. Постановка задачи Коши. Интегральные кривые. Общий и частный интегралы. Обобщения на случай нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения высокого порядка. Теорема существования и единственности решения задачи Коши (без доказательства).
19. Однородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и их общее решение. Общее решение неоднородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Нахождение частного решения неоднородного уравнения. Символический метод. Метод неопределенных коэффициентов. Резонанс.
20. Общие однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Структура общего решения. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского и его свойства. Теорема Лиувилля. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Структура общего решения. Метод вариации произвольных постоянных.
21. Общие однородные линейные дифференциальные уравнения высокого порядка. Структура общего решения. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского и его свойства. Теорема Лиувилля. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения высокого порядка. Структура общего решения. Метод вариации постоянных. Резонанс.
22. Системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Матричная запись такой системы. Матричные решения. Матричная экспонента. Общее решение однородной системы. Структура общего решения неоднородной системы. Метод вариации для нахождения частного решения неоднородной системы.

23. Основные классы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка (с разделяющимися переменными, однородные, в полных дифференциалах) и методы их решения. Дифференциальные уравнения первого порядка не разрешенные относительно производной. Общий интеграл и особое решение таких уравнений. Уравнение Клеро и его особое решение.

4-й семестр (всего 60 часов, в середине семестра коллоквиум и в сессию экзамен)

24. Абсолютно сходящиеся тригонометрические ряды. Сумма ряда, нахождение коэффициентов ряда по сумме.
25. Тригонометрические ряды Фурье. Минимизирующее свойство отрезка ряда Фурье. Неравенство Бесселя.
26. Обобщенный ряд Фурье в абстрактном евклидовом пространстве. Замкнутость ортонормированной системы функций. Равенство Парсеваля, его связь со сходимостью обобщенного ряда Фурье в среднеквадратичном смысле.
27. Свертка периодических функций, ее свойства. Ряд Фурье свертки. Приближение непрерывных и интегрируемых функций гладкими. Лемма Римана-Лебега.
28. Теоремы Дирихле о равномерной и поточечной сходимости тригонометрических рядов Фурье для непрерывно дифференцируемых функций.
29. Сходимость тригонометрических рядов Фурье в среднеквадратичном. Равенство Парсеваля. Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье. Ряд Фурье и сдвиг.
30. Приложения рядов Фурье для решения дифференциальных, разностных и интегральных уравнений.
31. Симметричная форма записи линейного дифференциального уравнения второго порядка. Виды краевых условий. Краевые задачи. Постановка задачи Штурма-Лиувилля.
32. Свойства собственных функций и собственных чисел задачи Штурма-Лиувилля. Замкнутость полной системы собственных функций.
33. Преобразование Фурье. Его простейшие свойства. Теорема Фурье об обращении.
34. Унитарность преобразования Фурье. Функции класса Шварца. Равенство Парсеваля. Теоремы подобия и сдвига для преобразования Фурье.
35. Свертка функций на оси. Ее свойства. Преобразование Фурье свертки.
36. Преобразование Фурье производной. Связь гладкости со скоростью убывания при преобразовании Фурье. Преобразование Фурье гауссовой плотности.
37. Приложения преобразования Фурье для решения дифференциальных, разностных и интегральных уравнений.
38. Простейшая задача вариационного исчисления. Интегральный функционал. Его вариация. Примеры вариационных задач.
39. Основная лемма вариационного исчисления. Вывод уравнения Эйлера-Лагранжа. Первые интегралы уравнения Эйлера-Лагранжа.
40. Основные примеры. Задача о брахистохроне, задача о минимальной поверхности вращения, геодезические на сфере.
41. Обобщения. Функционалы, зависящие от нескольких функций. Функционалы с высшими производными. Кратные интегралы и уравнения Эйлера-Остроградского. Волновое уравнение как уравнение Эйлера.
42. Условные вариационные задачи. Изопериметрическая задача. Метод множителей Лагранжа. Задача Дидоны.
43. Задача Лагранжа. Голономные и неголономные связи. Метод множителей Лагранжа. Приложения к нахождению геодезических.
44. Задачи со свободными концами и естественные граничные условия. Условия трансверсальности.

45. Условие Вейерштрасса-Эрдмана на изломе. Приложения к функционалам Ферма геометрической оптики.
46. Функция Гамильтона. Система уравнений Эйлера-Лагранжа в канонической форме.
47. Линейные и квазилинейные уравнения в частных производных. Метод характеристик. Представление о методе характеристик для нелинейного уравнения в частных производных первого порядка. Уравнение эйконала.
48. Понятие поля экстремалей. Инвариантный интеграл Гильберта. Функция поля. Уравнение Гамильтона-Якоби.
49. Теорема Якоби о построении решения канонических уравнений. Метод разделения переменных для решения уравнения Гамильтона-Якоби.
50. Прямые методы в вариационном исчислении. Вариационный подход к задаче Штурма-Лиувилля. Минимаксный принцип в задачах на собственные значения.
51. Теорема Куранта о сравнении собственных чисел. Доказательство стремления собственных значений задачи Штурма-Лиувилля к бесконечности.
52. Элементы качественной теории дифференциальных уравнений на плоскости. Фазовые траектории, фазовый портрет. Фазовые портреты простых линейных систем.
53. Теорема о линеаризации. Понятие о предельном цикле. Достаточное условие отсутствия предельных циклов. Примеры фазовых портретов.

3.2. Примерный план практических занятий
3-й семестр (60 часов)

1) занятие: двойной интеграл
2) занятие: тройной интеграл
3) занятие: 1-я контрольная работа (1 час), замена переменных в двойном интеграле
4) занятие: замена переменных в двойном интеграле (продолжение)
5) занятие: замена переменных в тройном интеграле
6) занятие: замена переменных в тройном интеграле (продолжение)
7) занятие: приложения двойных и тройных интегралов
8) занятие: приложения двойных и тройных интегралов (продолжение), 2-я контрольная работа (1 час)
9) занятие: криволинейный интеграл 1 рода, поверхностный интеграл 1-го рода
10) занятие: поверхностный интеграл 1 рода (продолжение)
11) занятие: 3-я контрольная работа (1 час), криволинейный интеграл 2 рода
12) занятие: формула Грина
13) занятие: 4-я контрольная работа (1 час), поверхностный интеграл 2 рода
14) занятие: поверхностный интеграл 2 рода (продолжение)
15) занятие: формула Стокса
16) занятие: формула Остроградского–Гаусса
17) занятие: векторный анализ
18) занятие: векторный анализ (продолжение)
19) занятие: 5-я контрольная работа (2 часа) – 8 баллов
20) занятие: линейные дифференциальные уравнения 1 порядка
21) занятие: 6-я контрольная работа (1 час), линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами
22) занятие: линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами
23) занятие: линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (продолжение)
24) занятие: линейные дифференциальные уравнения 2 порядка

25) занятие: системы линейных дифференциальных уравнений
26) занятие: системы линейных дифференциальных уравнений (продолжение)
27) занятие: 7-я контрольная работа (2 часа) – 8 баллов
28) занятие: нелинейные дифференциальные уравнения
29) занятие: нелинейные дифференциальные уравнения (продолжение)
30) занятие: нелинейные дифференциальные уравнения, 8-я контрольная работа (1 час)

4-семестр (45 часов)

1) неделя: тригонометрические ряды Фурье
2) неделя: разложение четных и нечетных функций, интегрирование рядов Фурье
3) неделя: 1-я контрольная (1 час), свертка периодических функций
4) неделя: приложения рядов Фурье
5) неделя: 2-я контрольная работа (1 час), задача Штурма–Лиувилля
6) неделя: задача Штурма–Лиувилля (продолжение), преобразование Фурье
7) неделя: приложения интеграла Фурье
8) неделя: 3-я контрольная работа (2 часа)
9) неделя: коллоквиум
10) неделя: простейшая задача вариационного исчисления
11) неделя: 4-я контрольная работа (1 час), экстремали двойных и тройных интегралов
12) неделя: задачи на условный экстремум
13) неделя: задачи со свободными концами и условия трансверсальности
14) неделя: 5-я контрольная работа, канонические уравнения
15) неделя: 6-я контрольная работа, уравнение Гамильтона–Якоби

4. Вопросы к экзамену

4.1.Перечень основных вопросов коллоквиума в третьем семестре

1. Что такое двойной интеграл? Перечислите его основные свойства.
2. Что такое тройной интеграл ? Перечислите его основные свойства.
3. Как свести двукратный интеграл к повторному?
4. Что такое якобиан отображения? Его геометрический смысл.
5. Опишите формулу замены переменных в кратном интеграле.
6. Как выглядит двукратный интеграл в полярных координатах? Дайте пример.
7. Как выглядит трехкратный интеграл в цилиндрических координатах? Дайте пример.
8. Как выглядит трехкратный интеграл в сферических координатах? Дайте пример.
9. Что такое несобственный интеграл от функции: неограниченной в точке? Приведите пример?
10. Что такое несобственный интеграл по неограниченному множеству? Приведите пример?
11. Сформулируйте признаки абсолютной сходимости двойного интеграла в точке и на бесконечности.
12. Сформулируйте признаки абсолютной сходимости трехкратного интеграла в точке и на бесконечности.
13. Что такое гладкая кривая на плоскости, в пространстве? Касательный вектор.
14. Что такое ориентация кривой? Параметризация, согласованная с ориентацией.
15. Определение и физический смысл криволинейного интеграла 1-ого рода.
16. Что такое гладкая поверхность? Как вычислить площадь гладкой поверхности?
17. Определение и физический смысл поверхностного интеграла 1-го рода.

4.2. Перечень основных вопросов экзамена (без учета коллоквиума) в третьем семестре

1. Что такое ориентация кривой? Параметризация, согласованная с ориентацией.
2. Определение и физический смысл криволинейного интеграла 2-ого рода на плоскости.
3. Напишите формулу Грина на плоскости.
4. Условия независимости криволинейного интеграла на плоскости от пути интегрирования.
5. Восстановление функции двух переменных по ее дифференциалу.
6. Ориентация поверхности и области в трехмерном пространстве.
7. Всякая ли поверхность допускает ориентацию? Приведите примеры.
8. Что такое согласованные ориентации поверхности и ее края в пространстве?
9. Что такое согласованные ориентации области и ее границы в трехмерном пространстве?
10. Определение поверхностного интеграла 2-ого рода.
11. Как записать поверхностный интеграл 2-ого рода через интеграл 1-ого рода?
12. Напишите формулу Стокса.
13. Напишите формулу Гаусса - Остроградского.
14. Что такое градиент функции? Явная формула в декартовых координатах. В чем заключается геометрический смысл градиента?
15. Что такое ротор векторного поля? Дайте явную формулу в декартовых координатах? В чем состоит физический смысл ротора?
16. Что такое дивергенция векторного поля? Дайте явную формулу в декартовых координатах. В чем состоит физический смысл дивергенции.
17. Что такое оператор "набла"?
18. Что такое потенциальное векторное поле и как найти его потенциал?
19. Что такое соленоидальное векторное поле и как найти его векторный потенциал?
20. Какие алгебраические операции над 0-, 1- и 2-формами на плоскости Вы знаете?
21. Что такое внешний дифференциал функции и 1-формы на плоскости?
22. Напишите формулу Грина на плоскости на языке форм.
23. Какие дифференциальные формы бывают в трехмерном пространстве? Их интерпретация.
24. Какие алгебраические операции над дифференциальными формами в пространстве Вы знаете?
25. Что такое внешний дифференциал формы в пространстве?
26. Каков общий вид формулы Стокса для множеств в трехмерном пространстве?
27. Специальный случай общей формулы Стокса: интеграл от дифференциала 1-формы по поверхности (классическая формула Стокса)
28. Специальный случай формулы Стокса: интеграл от дифференциала 2-формы по области (формула Гаусса - Остроградского).
29. Как получить общее решение линейного дифференциального уравнения 1-ого порядка? Дайте формулу для решения задачи Коши.
30. Что можно сказать о структуре множества решений однородного и неоднородного линейного дифференциального уравнения 2-ого порядка?
31. Что Вы знаете о вронскиане для дифференциального уравнения 2-ого порядка?
32. Как найти общее решение линейного однородного уравнения 2-ого порядка, если известно одно его частное решение?
33. Как найти решение линейного неоднородного уравнения 2-ого порядка, если известно общее решение однородного уравнения?
34. Что можно сказать о структуре множества решений однородного и неоднородного линейного дифференциального уравнения n- ого порядка?

35. Что Вы знаете о вронскиане для дифференциального уравнения n- ого порядка?
36. В чем состоит метод неопределенных коэффициентов для линейного дифференциального уравнения n- ого порядка с постоянными коэффициентами?
37. Что такое линейная система дифференциальных уравнений 1-ого порядка и что можно сказать о структуре множества решений этой системы, однородной и неоднородной? Как свести скалярное уравнение к такой системе?
38. Что Вы знаете о вронскиане для системы линейных дифференциальных уравнений 1-ого порядка?
39. Что такое резонанс?
40. Что такое матричная экспонента? Как ее вычислить?
41. Как построить решения однородной системы 1-ого порядка с постоянными коэффициентами? Дайте общую формулу для разрешающего оператора линейной системы с постоянными коэффициентами.
42. В чем состоит геометрический смысл дифференциального уравнения 1-ого порядка и задачи Коши?
43. Сформулируйте теорему существования и единственности решения задачи Коши. Приведите примеры нарушения условий и утверждений теоремы.
44. Что такое уравнение с разделяющимися переменными? Что такое деление переменных? Что такое однородные уравнения? Как они сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными?
45. Уравнение Клеро.
46. Огибающая семейства кривых. Особое решение. Пример.
47. Что такое уравнение в полных дифференциалах? Сформулируйте необходимое и достаточное условие того, что данное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах. Как найти решение такого уравнения?
48. Что такое интегрирующий множитель?

4.3. Перечень основных вопросов коллоквиума в четвертом семестре

1. Как найти коэффициенты равномерно сходящегося тригонометрического ряда по его сумме?
2. Что такое ряд Фурье на пространстве 2π-периодических функций?
3. В чем состоит минимизирующее свойство коэффициентов ряда Фурье?
4. Что утверждает неравенство Бесселя? Что такое равенство Парсеваля? Объясните связь равенства Парсеваля со сходимостью ряда Фурье в среднеквадратичном смысле.
5. Как разложить функцию, заданную на интервале $(0, \pi)$, в ряд по косинусам кратных дуг? по синусам?
6. Дайте определение свертки периодических функций. Как найти коэффициенты Фурье свертки?
7. Как найти производную свертки, если один из сверточных сомножителей дифференцируем? Как это свойство можно использовать для сглаживания функции?
8. Что утверждает лемма Римана–Лебега? Какова ее связь со стремлением коэффициентов Фурье к нулю?
9. Сформулируйте теорему Дирихле для непрерывно дифференцируемых функций. Докажите, что ряд Фурье сходится к такой функции равномерно.
10. Что представляет собой ряд Фурье производной? Какова связь между гладкостью функции и скоростью убывания коэффициентов Фурье?

11. Как ставится регулярная задача Штурма–Лиувилля? Что такое собственные функции и собственные значения такой задачи?
12. Перечислите основные свойства собственных функций задачи Штурма–Лиувилля.
13. Перечислите основные свойства собственных значений задачи Штурма–Лиувилля.
14. Как вычисляются коэффициенты обобщенного ряда Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля?
15. Сформулируйте теорему о сходимости обобщенного ряда Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля.

4.4. Перечень основных вопросов экзамена (без учета коллоквиума) в четвертом семестре

Интеграл Фурье:

1. Что такое преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции? Опишите его основные свойства.
2. Сформулируйте теорему об обращении преобразования Фурье.
3. Что представляет собой равенство Парсеваля для преобразования Фурье? Дайте примеры.
4. Как найти преобразование Фурье производной? Какова связь между гладкостью функции и скоростью убывания ее преобразования Фурье на бесконечности?
5. Как найти преобразование Фурье произведения функции на аргумент? Какова связь между скоростью убывания функции на бесконечности с гладкостью ее преобразования Фурье?
6. Дайте определение свертки функций на оси. Чему равно преобразование Фурье свертки.
7. Что такое гауссова плотность? Чему равно преобразование Фурье гауссовой плотности?

Вариационное исчисление:

8. Что такое интегральный функционал? Что такое вариация интегрального функционала?
9. Сформулируйте основную лемму вариационного исчисления. Опишите идею ее доказательства.
10. Что такое уравнение Эйлера–Лагранжа? Как оно получается?
11. Пусть функция Лагранжа $F(x,y,y')$ не зависит от переменной x . Что представляет собой первый интеграл уравнения Эйлера–Лагранжа? Почему?
12. Что такое естественные граничные условия? В каких вариационных задачах они возникают?
13. Выпишите уравнения Эйлера–Лагранжа в случае нескольких функций. Как они получаются?
14. Сформулируйте принцип наименьшего действия в лагранжевой механике. Что представляют собой уравнения Эйлера-Лагранжа, если кинетическая энергия равна $T = m(x'2+y'2+z'2)/2$, а потенциальная $U = U(x,y,z)$?
15. Выпишите уравнение Эйлера–Лагранжа для экстремалей двойных интегралов. Как оно выводится?
16. Что представляет собой волновое уравнение? Дайте его интерпретацию как уравнения Эйлера–Остроградского.
17. Как ставится изопериметрическая задача? Как она сводится к задаче на условный экстремум функции нескольких переменных?

18. Как ставится задача Лагранжа? В чем отличие голономных связей от неголономных? Что такое множители Лагранжа в случае задачи Лагранжа, в чем их отличие от множителей Лагранжа для изопериметрической задачи?
19. Что такое условие трансверсальности? Каков его геометрический смысл?
20. Сформулируйте принцип Ферма в геометрической оптике. Что представляет собой трансверсальность в геометрической оптике. Почему?
21. Выпишите условие Вейерштрасса–Эрдмана (на изломе). Какое заключение оно позволяет сделать в случае функционалов геометрической оптики?
22. Опишите функцию Гамильтона. Что такое канонический вид уравнений Эйлера–Лагранжа?
23. Объясните, как по частному решению уравнения Гамильтона–Якоби можно построить поле экстремалей?
24. Прямые методы вариационного исчисления
25. Дайте вариационное описание собственных значений задачи Штурма–Лиувилля. Объясните рост собственных значений.
26. Сформулируйте теорему Куранта
27. В чем заключается минимаксное свойство собственных значений? Объясните, как это позволяет сделать вывод о росте собственных значений к бесконечности.

Изучение фазовых портретов:

28. Что такое автономные системы дифференциальных уравнений на плоскости? Что представляет собой фазовый портрет такой системы?
29. Что такое гамильтоновы системы на плоскости? Какие их свойства Вам известны?
30. Опишите фазовые портреты линейных систем в случае вещественных собственных значений.
31. Опишите фазовые портреты линейных систем в случае комплексных собственных значений.
32. Что такое критические (неподвижные) точки общих систем дифференциальных уравнений на плоскости. Что утверждает теорема о линеаризации.
33. Что понимается под предельным циклом. Приведите пример.

Все материалы по курсу, в том числе примерный список вопросов в дополнительной части экзамена и тематику экзаменационных задач, можно найти на сайте кафедры по адресу

http://math.nw.ru/~budylin

4.5. Вопросы, выносимые на итоговый государственный экзамен

(только для направления 010600 «Прикладные математика и физика»)

1. Кратные интегралы. Сведение двойных интегралов к повторным.
2. Замена переменных в кратных интегралах. Полярные и сферические координаты.
3. Криволинейные интегралы первого и второго рода. Определения, интерпретация.
4. Поверхностные интегралы первого и второго рода.
5. Операторы grad, div, rot, Δ (определение в декартовых координатах).
6. Формула Грина. Потенциал векторного поля на плоскости.
7. Формула Гаусса-Остроградского.
8. Обыкновенные дифференциальные уравнения: теорема существования и единственности решения задачи Коши.
9. Однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Пространство решений. Определитель Вронского.

10. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Метод вариации произвольных постоянных.
11. Линейные системы первого порядка с постоянными коэффициентами.
12. Тригонометрический ряд Фурье. Формулы для коэффициентов. Признак равномерной сходимости.
13. Ортонормированные системы. Ряд Фурье по ортонормированной системе, сходимость в среднем. Равенство Парсеваля.
14. Задача Штурма-Лиувилля. Свойства собственных функций.
15. Интеграл Фурье. Обратное преобразование Фурье. Свертка, преобразование Фурье свертки.
16. Первая вариация интегрального функционала. Необходимое условие экстремума. Уравнения Эйлера-Лагранжа.
17. Естественные граничные условия.
18. Задача Лагранжа.

5. Литература

5.1. Основная

1. В.И.Смирнов. Курс высшей математики, т. 2, М. Наука 1974.
2. Г.Е.Шилов. Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных. М.Наука 1971.
3. И.А.Виноградова и др. Математический анализ в задачах и упражнениях. ИМУ, 1991.
4. Г.Е.Шилов. Математический анализ. Функции одной вещественной переменной. Ч3. М.Наука, 1970.
5. В.И.Смирнов. Курс высшей математики, т. 4 ч. 1, М. Наука 1974.
6. А.М.Будылин. Методическое пособие по высшей математике в третьем семестре с примерами решения типовых задач. СпбГУ, 2007
7. А.М.Будылин. Основные вопросы по высшей математике в третьем семестре. СпбГУ, 2007
8. Е.Е.Лемехов и др. Методические указания к практическим занятиям по курсу Высшая математика, III семестр, ЛГУ, 1984
9. Е.Е.Лемехов и др. Методические указания к практическим занятиям по курсу Высшая математика, IV семестр, ЛГУ, 1987

5.2. Дополнительная

1. Г.М.Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 3, Физматлит 2003.
2. Л.Шварц, Анализ, М.Мир, 1972
3. В.С.Буслаев. Вариационное исчисление. ЛГУ, 1980.
4. А.М.Будылин. Вариационное исчисление на языке дифференциальных форм. СпбГУ, 2009