Лекция 22.12.21

Нелинейные уравнения

$$\cancel{a(x)y''(x)+b(x)y'=f(x)}$$

Однородные уравнения

1) $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$

2) $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$,

где $M(x,y)$, $N(x,y)$ –

— однор. ф-ии одной и той же степени.

$\left[\begin{array}{l} M(x,y) \text{ — однор. степени } n, \\ \forall\ k>0 \\ M(kx,ky)=k^n M(x,y) \end{array}\right]$

Решение в этих случаях ищется с помощью подст-ки:

$$\underline{y = t(x)\cdot x} \qquad (*)$$

(1) Пример 1 $\quad y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (**)$

$$y' \overset{(*)}{=} t'x + t$$

Из (**) ⇒

$$t'x + t = f(t)$$

$$\frac{dt}{dx}x = f(t) - t$$

$$\frac{dt}{f(t)-t} = \frac{dx}{x}$$

Переменные поделились

(2)

Пример:

$$x\,dy = (x+y)\,dx \qquad (2)$$

Функции x и $x+y$ — однородные степени 1.

$y = tx$

$dy = t\,dx + x\,dt$

Из ур. я (2):

$\cancel{tx\,dx} + x^2 dt = x\,dx + \cancel{tx\,dx}$

$x^2 dt = x\,dx$

$x \equiv 0$ — первое решение ур-я (2)

$\exists\ x \neq 0$

$dt = \frac{dx}{x}$

$t = \ln|x| + C$

$\{\ y = x\ln|x| + Cx$ —

$\left\{ \begin{array}{l} \text{— решение второе} \\ x \equiv 0 \text{ — решение} \end{array} \right.$

Уравнения вида

$$y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{ax+by+c}\right)$$

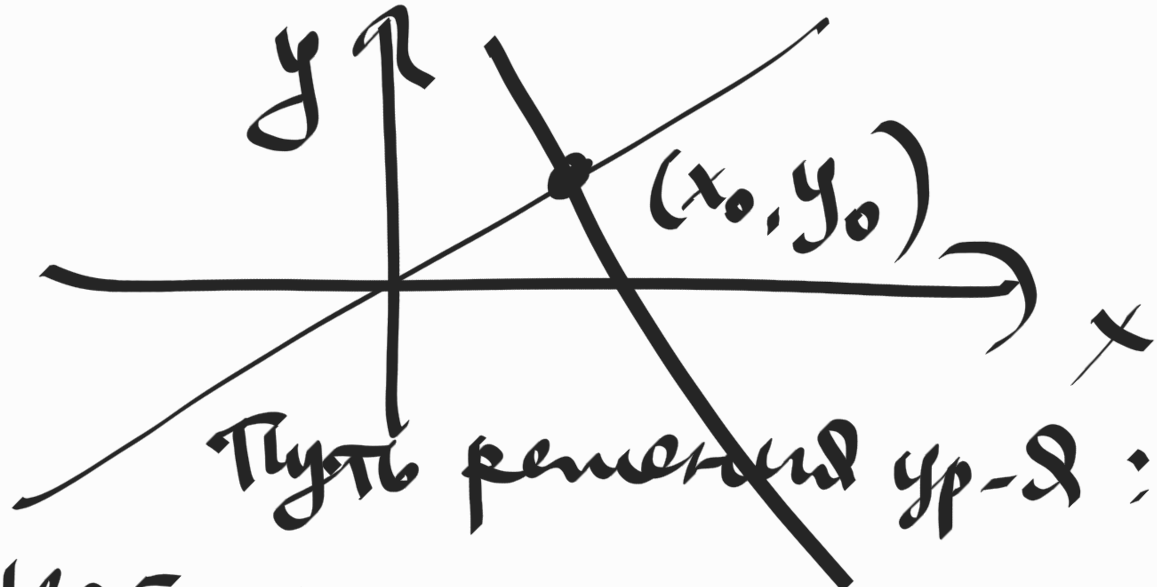
$\cancel{y = tx}$

$a_1x+b_1y+c_1=0$

— ур-е прямой

$ax+by+c=0$ —

— ур-е прямой



Путь решения ур-я:

1) Найдем точку пересечения прямых на плоскости.

2) перенесем начало координат в новых переменных в эту точку:
$$\begin{cases} \tilde{x} = x - x_0 \\ \tilde{y} = y - y_0 \end{cases}$$

3) Подстановка $y = tx$ сведет ур-е (2) к ур-ю с разделяющимися переменными.

Х Ситуацию, когда

прямые $a_1x+b_1y+c_1=0$,

$ax+by+c=0$

не пересекаются:

тогда $a_1x+b_1y=k(ax+by)$

В этом случае ур-е (2):

$$y'=F(ax+by)$$

Путь решения этого ур-я связан с заменой

$z=ax+by$.

тем самым,

$$z' = a + by'$$

$$y' = \frac{z' - a}{b} = F(z)$$

$$z' = a + bF(z)$$

$$\frac{dz}{a + bF(z)} = dx$$ — переменные делятся

■

Уравнения, сводящиеся к однородным заменой

$$y = z^m.$$

Пример:

$$2y+(x^2y+1)xy'=0 \quad (3)$$

* замену $y=z^m$

[$y\equiv 0$ - решение ур-я (3)].

$$\boxed{y'=mz^{m-1}z'}$$

из ур-я (3) $\Rightarrow$

$$2z^m+x^3\cdot z^m\cdot mz^{m-1}z'+x\cdot mz^{m-1}z'=0$$

$$2z^m+mx^3z^{2m-1}z'+mxz^{m-1}z'=0$$

$$2z^m dx + m x^3 z^{2m-1} dz + m x z^{m-1} dz = 0$$

$$m = 3 + 2m - 1 = 1 + m - 1$$

$$m = 2 + 2m$$

$$m = -2$$

Т.о. ур-е сводится к однородному заменой

$$y = z^{-2}.$$

Ур-е (3) принимает вид:

$$\frac{2}{z^2} - 2x^3 \frac{1}{z^5} z' - 2x \frac{z'}{z^3} = 0$$

$$z^3 - x^3 z' - x z^2 z' = 0$$

$$\underset{\substack{\parallel \\ M(x,z)}}{z^3} dx - \underset{\substack{\parallel \\ N(x,z)}}{(x^3 + x z^2)} dz = 0$$

M, N – функции, однородные степени 3.

<u>Уравнения в полных</u>

<u>дифференциалах.</u>

$$\cancel{\ast} \quad M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (4)$$

Ур-е (4) – ур-е в полных диф-ах, если $\exists$ функция $F(x,y)$, что:

$$dF(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy,$$

$$M(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad N(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}$$

Тогда ур-е (4):

$$dF = 0,$$

$F(x,y) = C$ – решение ур-я (4).

Заметим, что ур-е (4) яв-ся ур-ем в полных диф-ах, если

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

!

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \overset{!}{=} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$$

<u>Пример:</u>

Решить уравнение (5)

$$\underline{(2x+3x^2y)}dx + \underline{(x^3-3y^2)}dy = 0$$

Проверим, что ур-е (5) явл-ся ур-ем в полных диф-ах:

$$\begin{cases} M(x,y) = 2x + 3x^2 y, \\ N(x,y) = x^3 - 3y^2, \end{cases}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 \quad \blacksquare$$

Восстан-е ф-ии по её полному диф-лу:

$$F(x,y) = \int dx\,(2x + 3x^2 y) =$$

$$= x^2 + yx^3 + \varphi(y) \quad (6)$$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 3x^2 y}$$

Мы знаем, что

$$\frac{\partial F}{\partial y} \overset{(5)}{=} x^3 - 3y^2 \overset{(6)}{=} x^3 + \varphi'(y)$$

Т.о.; $\varphi'(y) = -3y^2$

$$\varphi(y) = -y^3 + \tilde{C} \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6):

$$F(x,y) = x^2 + yx^3 - y^3 + \tilde{C}.$$

Решение исходного

ур-я (5) : $F(x,y)=C$

$$x^2+yx^3-y^3+\tilde{C}=C$$

$$x^2+yx^3-y^3=C_1$$

– решение ур-я (5). ■

Интегрирующий множитель

для уравнения

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \quad (8)$$

Т.к. ур-е (8) не явл-ся уравнением в полных диф-ах.

однако, если

$M, N \in C^1(D)$, $(x,y) \in D$,

$M(x,y)$ и $N(x,y)$ не обр-ся в ноль одновременно:

$\exists$ ф-я $\hat{m}(x,y)$ — интегрирующий множитель:

После умн-я левой и

ур-бой части ур-я (8)
на $m(x,y)$ ур-е (8)
становится ур-ем в
полных дифф-ах.

<u>Пример</u>:-
<u>Решить уравнение</u>:-

$$y\,dx-(4x^2y+x)\,dy=0$$

<u>Решение</u>:

$$y\,dx-x\,dy-4x^2y\,dy=0 \qquad (9)$$

Поделим ур-е (9) на x^2.
[$x\equiv0$ - решение исходного

ур-е 8]

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{x^2} - 4y\,dy = 0 \qquad (10)$$

$$-d\left(\frac{y}{x}\right) - 2d\left(y^2\right) = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2} = -d\left(\dfrac{y}{x}\right) \\[2ex] d\left(\dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{dy\cdot x - y\,dx}{x^2} \end{cases}$$

ур-е (10) ;

$$d\left(\frac{y}{x} + 2y^2\right) = 0$$

$$\frac{y}{x} + 2y^2 = C \quad \blacksquare$$

Интегр-ий множитель:

$$\frac{1}{x^2};$$