Лекция 21.12.21

Неоднородные системы дифферен. ур-ний с постоянными коэф-ми.

$\forall$ систему

$$x_i' = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + \underline{f_i(t)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (\alpha 1)$$

Ищем решение методом

неопред. коэф-ов в случае, когда функции $f_i(t)$ состоят из сумм и произведений функций:

$P_m(t)$, $e^{\alpha t}$, $\cos\beta t$, $\sin\beta t$,

полиномы

Это делается по тем же правилам, что и для одного линейного ур-ия с пост. коэф-ми со след-ими изменениями.

Если $f_i(t) = \underbrace{P_{m}}_{i}(t) e^{\gamma t}$, что частное решение системы (α1) ищется в виде:

$$x_i(t) = Q^i_{m+s}(t)\, e^{\gamma t}, \quad i=1,\dots,n \qquad (\alpha 2)$$

[для лин. неодн. ур-ий было $t^s Q_m(t)\, e^{\gamma t}$]

Здесь $Q^i_{m+s}(t)$ — многочлены степени $m+s$ с неизв. коэф-ми. Индекс m выбирается:

$$m = \max\{m_i\}.$$

Здесь $s = 0$, если γ – не корень характер. ур-я

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \cdot & - & \cdot & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

а если γ – корень, то s можно взять равным кратности этого корня. Точнее: s выбирается на 1 больше наибольшей из степеней многочленов, на которые умножена $e^{\gamma t}$ в общем решении однородной системы.

Неизвестные коэф-ы многочленов опред-ся путем подстановки выражений (Д2) в систему (Д1).

Аналогично опред-ся степени многочленов в частном решении и в случае, если $f_i(t)$ содержит $e^{\alpha t}\cos\beta t$, $e^{\alpha t}\sin\beta t$, а числа $\gamma = \alpha \pm i\beta$

являются корнями

характер. ур-я

$$\begin{cases} e^{\alpha t}\cos\beta t = \frac{1}{2}e^{\alpha t}\left(e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}\right) = \\ = \frac{1}{2}e^{(\alpha+i\beta)t} + \frac{1}{2}e^{(\alpha-i\beta)t} \end{cases}$$

(для веществ. матрицы

A).

Пример: решить систему

$$\begin{cases} x' = 4x - y + \underline{e^{3t}(\overset{\gamma=3}{t} + \overset{\gamma=3\pm i}{\sin t})} \\ y' = x + 2t + te^{3t}\cos t \end{cases} \quad (8)$$

Решение:

Составим соотв-ую однородную систему

$$\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = x + 2y. \end{cases} \qquad (23)$$

Находим корни характер. ур-я

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0,$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3.$$

Определим структуру решения одкор. системы:

$$\left.A-\lambda I\right|_{\lambda=3}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

$n=2, \quad r=1.$

Число лин. незав. с. в.

$\tilde{m}=n-r=2-1=1$

$\tilde{m}<k$ (кратность корня характ. полинома).

$k-\tilde{m}=2-1=1$ (степень полинома в решении одног. с-мы).

Общее решение однор. системы:

$$\begin{cases} x_0=(at+b)e^{3t}, \quad (*) \end{cases}$$

$\{ y_0 = (ct+d)e^{3t}$.

Подстановка предст-я (*) в однор. систему определит коэф-ы a, b, c, d. Среди них будет 2 произв. константы (кр-ть корня характ-полинома равна 2.)

$x_0' = (a + 3b + 3at)e^{3t}$,

$y_0' = (c + 3d + 3ct)e^{3t}$.

Т.о.

$$\begin{cases} (3b+a+3at)e^{3t} = (4at+4b-ct-d)e^{3t} \\ (c+3d+3ct)e^{3t} = (at+b+2ct+2d)e^{3t} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{lll} t^0e^{3t}: & 3b+a = 4b-d & \text{I ур.} \\ t^1e^{3t}: & 3a = 4a-c & \text{I ур.} \\ t^0e^{3t}: & c+3d = b+2d & \text{II ур.} \\ t^1e^{3t}: & 3c = a+2c & \text{II ур.} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} b = a+d \\ a = c \\ b = c+d \\ c = a \end{cases} \quad \begin{cases} a = c \\ b = a+d \end{cases}$$

Т $\begin{cases} a = C_1 \\ b = C_2 \end{cases}$ $>$ $d = C_2 - C_1$, $c = C_1$

(C_1, C_2 — две произв. постоянных).

Окончательно, общее решение однор. системы:

$$\begin{cases} x_0 = (C_1 t + C_2)e^{3t} \\ y_0 = (C_1 t + C_2 - C_1)e^{3t} \end{cases}$$

Обратимся к неоднор. системе.

В системе (8) для функций te^{3t}, $e^{3t}\sin t$,

$te^{3t}\cos t$

числа $\alpha \pm i\beta$ соотв.

равны $3,\ 3+i,\ 3-i$.

$=$

Т.о. нужно отдельно найти частные решения систем

$$\begin{cases} x' = 4x - y + te^{3t}, \\ y' = x + 2y, \end{cases} \quad (\alpha 4)$$

$$\begin{cases} x' = 4x - y + e^{3t}\sin t \\ y' = x + 2y + te^{3t}\cos t \end{cases} \quad (\alpha 5)$$

Для системы (24)

$\alpha + i\beta = 3$,

$s = 2$, $m = 1$.

Согласно (22) частное решение можно искать в виде:

$$\begin{cases} x_1 = (at^3 + bt^2 + ct + d)e^{3t} \\ y_1 = (ft^3 + gt^2 + ht + j)e^{3t} \end{cases}$$

Для системы (25)

$\alpha \pm i\beta = 3 \pm i$ (не явл-ся корнем характ. полинома).

Т. о. $s=0$, $m=1$.

Частное решение ищем в виде:

$$\begin{cases} x_2=(at+b)e^{3t}\sin t+(ct+d)e^{3t}\cos t \\ y_2=(et+g)e^{3t}\sin t+(ft+z)e^{3t}\cos t, \end{cases}$$

Отыскав значения коэф-ов $a, b, c, \dots, z$, общее решение системы (8) запишем в виде:

$$\begin{cases} x=x_0+x_1+x_2, \\ y=y_0+y_1+y_2. \end{cases}$$

Методы отыскания e^{A} (где A - матрица $n \times n$) и решение систем уравнений.

Решить систему уравнений

$$\vec{x}' = A\vec{x}, \quad (**) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Формальное решение

$$\hat{x} = e^{At}$$

(из подстановки в систему (**):

$\hat{X}' = A\hat{X}$),

Составим характеристич. полином (и найдём его корни):

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0.$$

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 1.$$

Воспользуемся тождеством Гамильтона - Кэли (каждая

Квадратная матрица является корнем своего характ-полинома:

$$A^2 - 4A + 3I = 0$$

Т.о. $A^2 = 4A - 3I = f_0(A^1, A^0)$.

$$A^3 = A \cdot A^2 = A(4A - 3I) =$$

$$= 4A^2 - 3A = 4(4A - 3I) - 3A =$$

$$= 16A - 12I - 3A = 13A - 12I =$$

$$= f_1(A^1, A^0).$$

Т.о. $\forall$ целая степень

матрицы также будет линейной функцией от A^1 и A^0. $(*)$

Ищем $e^{At} = \alpha \underline{I} + \beta A t$,

где α, β – некоторые числа.

Рассмотрим равенство $(*)$ на собств. векторах матрицы A и в этом смысле заменим матрицу на её собств. число:

$$\begin{cases} e^{3t} = \alpha + 3\beta t \\ e^{t} = \alpha + \beta t \end{cases}$$

$$e^{3t} - e^{t} = 2\beta t$$

$$\begin{cases} \beta t = \frac{1}{2}\left(e^{3t} - e^{t}\right) \\ \alpha = e^{t} - \beta t = e^{t} - \frac{1}{2}\left(e^{3t} - e^{t}\right) = \\ \quad = \frac{3}{2}e^{t} - \frac{1}{2}e^{3t} \end{cases}$$

Составим $e^{At} = \alpha I + \beta A t =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}e^{t} - \frac{1}{2}e^{3t} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}e^{t} - \frac{1}{2}e^{3t} \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} e^{3t}-e^{t} & -\frac{1}{2}(e^{3t}-e^{t}) \\ -\frac{1}{2}(e^{3t}-e^{t}) & e^{3t}-e^{t} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{2}e^{3t} & -\frac{1}{2}(e^{3t}-e^{t}) \\ -\frac{1}{2}(e^{3t}-e^{t}) & \frac{1}{2}(e^{t}+e^{3t}) \end{pmatrix}$$

Каждый из столбцов полученной матрицы является решением исходной системы.

Линейные комбинации этих столбцов также

Будут решениями.

Д первый столбец:

$$\vec{b}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{t} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{3t}$$

Д второй столбец:

$$\vec{b}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{t} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}e^{3t}$$

$$c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 = \overbrace{\frac{1}{2}(c_1+c_2)}^{\tilde{c}_1 =}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{t} + \underbrace{\frac{1}{2}(c_1-c_2)}_{\tilde{c}_2 =}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{3t} =$$

$$= \tilde{C}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + \tilde{C}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

В случае вырожденных корней характер. ур-я последующие уравнения системы для определения коэф-ов в структуре e^{At} получаются из первого дифференцирования по значку A.

$$\begin{cases} e^{At}\Big|_{A=\lambda_1} = \alpha I + A\beta t\Big|_{A=\lambda_1} & (1) \\ e^{At}\Big|_{A=\lambda_2} = \alpha I + A\beta t\Big|_{A=\lambda_2} & (2) \end{cases}$$

$$\left(\lambda_1 = \lambda_2 + \varepsilon,\quad 0 < \varepsilon << 1\right)$$

$$\frac{(1)-(2)}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

<u>Пример</u>: $\exists\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

характер. ур-е: $(\lambda-1)^2 = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1,$

$$e^{At} = \alpha I + \beta A t$$

$$\left.\begin{aligned} e^{t} &= \alpha + \beta t \\ t e^{t} &= \beta t \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &(1)' \\ &(2)' \end{aligned}$$

В случае, когда матрица имеет более высокую разм-ть (3×3);

$$e^{At} = \alpha I + \beta A t + \gamma A^2 t^2$$

(Все остальное работает).

Разрешающий оператор.

$$\exists \begin{cases} \vec{x}\,' = A\vec{x} + \vec{f}(t), & (1) \\ \vec{x}\Big|_{t=t_0} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \vec{x}_0 & (2) \end{cases}$$

$\exists$ нам известен оператор

$$\hat{R}(t, t_0) \equiv e^{A(t-t_0)}$$

Будем искать частное решение ур-я (1) в виде:

$$\vec{x}_2(t) = e^{A(t-t_0)}\vec{\xi}(t) \quad (3)$$

Подставим (3) в (1):

$$\vec{x}'(t) = Ae^{A(t-t_0)}\vec{\xi}(t) +$$

$$+ e^{A(t-t_0)}\vec{\xi}'(t) =$$

$$= A\vec{x}(t) + \underbrace{e^{A(t-t_0)}\vec{\xi}'(t)}$$

Согласно (1):

$$e^{A(t-t_0)}\vec{\xi}'(t)=\vec{f}(t)$$

$$\vec{\xi}'(t)=e^{A(t_0-t)}\vec{f}(t)$$

$$\vec{\xi}(t)=\int_{t_0}^{t}dt'\,e^{A(t_0-t')}\vec{f}(t')$$

$$\vec{x}_2(t)\overset{(3)}{=}e^{A(t-t_0)}\vec{\xi}(t)=$$

$$=e^{A(t-t_0)}\int_{t_0}^{t}dt'\,e^{A(t_0-t')}\vec{f}(t')=$$

$$= \int_{t_0}^{t} dt' e^{A(t-t')} \vec{f}(t') ;$$

Общее решение ур-я (1) имеет вид:

$$\vec{x}(t) = \hat{R}(t, t_0) \vec{x}_0 +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} dt' \hat{R}(t, t') \vec{f}(t') ,$$

где $\hat{R}(t, t') = e^{A(t-t')}$

— разрешающий

оператор.