Лекция 15.12.21

Пример: (продолжение)

$$\begin{cases} y'' = z + x & (1)^* \\ z'' = y + 2x & (2)^* \end{cases}$$

$$y^{(IV)} - y = 2x \qquad (3)^*$$

1) $y^{(IV)} - y = 0$

$$y_0(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} +$$

$$+ C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = i,\ \lambda_4 = -i$

2) $y_2 = ax + b$

из $(3)^*$: $-ax - b = 2x$

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \end{cases} \qquad y_2 = -2x$$

$$\begin{cases} y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - 2x \\ z(x) = y'' - x = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x - x \end{cases}$$

__Системы линейных ~~дифференциальные~~ уравнений с постоянными коэф-ми__

(1-го порядка).

* систему ур-ий:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + \ldots a_{1n}x_n \\ x_2' = a_{21}x_1 + \ldots a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases} \quad (1)$$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Первый шаг в решении системы (1) есть

нахождение корней характеристического ур-я:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

$$\left(\det(A-\lambda I)=0\right)$$

$\forall$ простому корню λ_i ур-я (2) соответствует решение $C_i \vec{v}_i e^{\lambda_i t}$,

где C_i - произвольная постоянная

$\vec{v}_i$ - собств. вектор матрицы A,

соотв-ий с.ч. λ_i

$$\vec{X}' = A\vec{X},$$

$$\exists\ \vec{X} = e^{\lambda t}\vec{v}_\lambda$$

$$\lambda e^{\lambda t}\vec{v}_\lambda = \lambda e^{\lambda t}\vec{v}_\lambda$$

2) $\exists$ корень характер-ого

ур-я (2) λ является

кратным -

2.1) Если для кратного корня

λ имеется столько линейно

независимых собств. векторов

$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}^k$, какова

его кратность, то ему

соответствует решение вида:

$$C_1 \vec{v}^1 e^{\lambda t} + C_2 \vec{v}^2 e^{\lambda t} + \dots + C_k \vec{v}^k e^{\lambda t}.$$

2.2) Если для корня λ

кратности k имеется

только m линейно.независимых

с.в. ($m<k$), то решение, соответствующее этому λ можно искать в виде произведения многочлена степени $k-m$ на $e^{\lambda t}$.

Здесь $m=n-r$

n - размерность матрицы

r - ранк матрицы $A-\lambda\underline{I}$

$$(3)\begin{cases} x_1=(a+bt+\ldots+dt^{k-m})e^{\lambda t}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n=(p+qt+\ldots+st^{k-m})e^{\lambda t}. \end{cases}$$

Чтобы найти коэф-ы (3) a, в, ..., s, надо подставить решение (3) в систему (1).

Приравнивая коэф-ы подобных членов в л. и п. частях уравнений, получим систему алгебраич. ур-ий на коэф-ы a, в, ..., s. Среди этих коэф-ов должно быть k произвольных, где k-кратность λ.

Найдя для каждого λ решения указанного вида, сложим их и получим общее решение системы

! в общем решении системы число произвольных постоянные д. в. равно размерности системы n.

<u>Пример</u>: решить систему

$$\left.\begin{aligned} x' &= 2x+y+z \\ y' &= -2x-z \\ z' &= 2x+y+2z \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

<u>Решение</u>:

1) составим характер. уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (4')$$

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda-2)(\lambda-1)^2 = 0$$

Корни: $\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1$

$\varkappa_1 = 1, \quad \varkappa_2 = 2$

2)

Для простого корня

$\lambda_1 = 2$ находим с.в.

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(A - \lambda_1 I)\vec{v}_1 = 0.$$

$$\begin{cases} \beta + \gamma = 0 \\ -2\alpha - 2\beta - \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\beta = -2\alpha, \quad \beta = -\gamma, \quad 2\alpha + 2\beta = -\gamma$$

$\exists\ \alpha=1,\ \beta=-2,\ \gamma=2$

$$\vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix},\quad \vec{X}_1=e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1$$

т.о. часть решения системы, отвечающая с.ч. λ_1 такова:

$$\begin{cases} x=e^{2t},\ y=-2e^{2t}, \\ z=2e^{2t}. \end{cases}$$

3) Для кратного корня $\lambda_2 = 1$ сначала определим число линейно независимых С.В.

$$(A - \lambda_2 I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Порядок матрицы (6) равен $n = 3$,

rank $= 2$, $(r = 2)$

Число л.н. с. векторов

$m = n - r = 3 - 2 = 1$,

Корень $\lambda_2 = 1$ имеет кратность $k = \varkappa_2 = 2$.

Поскольку $k > m$, ищем решение в след. виде:

$$\left.\begin{aligned} x &= (a + bt)e^{t}, \\ y &= (c + dt)e^{t}, \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

$z = (f + gt)e^t.$

Ищем коэф-и $a, b, \dots g$.

Подставим (7) в систему (4):

$$\begin{cases} x'(t) = \underline{be^t + (a+bt)e^t} \ (*) \\ y'(t) = de^t + (c+dt)e^t \\ z'(t) = ge^t + (f+gt)e^t \end{cases}$$

из (4) с учетом (*) следует:

$$\begin{cases} (a+b+bt)e^{t} = 2(a+bt)e^{t} + (c+dt)e^{t} + (f+gt)e^{t} \\ (d+c+dt)e^{t} = -2(a+bt)e^{t} - (f+gt)e^{t} \\ (g+f+gt)e^{t} = 2(a+bt)e^{t} + (c+dt)e^{t} + 2(f+gt)e^{t} \end{cases}$$

Приравняем коэф-ы при ф-ях te^{t} и e^{t} в каждом из уравнений слева и справа:

$$
\left.\begin{aligned}
a+b &= 2a+c+f \\
b &= 2b+d+g \\
d+c &= -2a-f \\
d &= -2b-g \\
g+f &= 2a+c+2f \\
g &= 2b+d+2g
\end{aligned}\right\}
$$

<u>Решение этой системы</u>

$$a=-d, \quad b=0, \quad g=-d$$

$$f=-a-c=d-c$$

Т.о., все коэф-ы выражаются через d и c.

Возникло два ($k=2$)

$\Updownarrow$

$x_2=2$

произвольных коэф-а;

Положим $\begin{cases} c = C_1 \\ d = C_2 \end{cases}$

Тогда: $\begin{cases} a = -C_2, & c = C_1 \\ b = 0, & d = C_2 \\ f = C_2 - C_1, & g = -C_2 \end{cases}$

Окончательно, часть решения, соотв-ая

вырожденному с.ч.
$\lambda_2 = 1$ имеет вид:

$$\begin{cases} x = -C_2 e^{t} \\ y = (C_1 + C_2 t) e^{t} \\ z = (C_2 - C_1 - C_2 t) e^{t} \end{cases}$$

Добавим к этому решению часть, отвечающую $\lambda_1 = 2$:

$$C_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = C_3 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -2e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

4) Окончательный ответ:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_2 e^{t} + C_3 e^{2t} \\ (C_1 + C_2 t) e^{t} - 2C_3 e^{2t} \\ (C_2 - C_1 - C_2 t) e^{t} + 2C_3 e^{2t} \end{pmatrix}.$$

$$\vec{X}' = A\vec{X}$$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

n $\quad \lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3$

$\qquad \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3$

$$x_1 + x_2 + x_3 = n.$$

$$c_\lambda \vec{v}_\lambda e^{\lambda t}$$

$$c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda t} + \dots + c_k \vec{v}_k e^{\lambda t}$$

$$m = k$$

$m < k$

$$\begin{cases} x(t) = P_{1,k-m}(t)\, e^{\hat{\lambda} t} \\ y(t) = P_{2,k-m}(t)\, e^{\hat{\lambda} t} \\ - \quad - \quad - \quad - \\ z(t) = P_{n,k-m}(t)\, e^{\lambda t} \end{cases}$$