Лекция 14.12.21

Уравнение II порядка (продолжение).

$\forall$ неоднор. ур-е (*)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x).$$

$\exists$ y_1, y_2 — два л.н. решения однор. ур-я

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Мы ищем частное решение неоднор. ур-я в виде

$$u(x) = v_1(x)y_1 + v_2(x)y_2, \quad (1)$$

где v_1, v_2 – неизв. ф-ии.

[На прошлой лекции мы пришли к системе уравнений] (2)

$$\begin{cases} v_1'(x)y_1 + v_2'(x)y_2 = 0 \\ v_1'(x)y_1' + v_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}$$

Получена система уравнений для определения $v_1'(x)$ и $v_2'(x)$.

Ввиду линейной независимости решений y_1 и y_2 определитель Вронского

$$\Delta(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1' \neq 0$$

(на области непрер-ти коэф-ов $p(x)$ и $q(x)$).

Поэтому система (2)

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

(матрица имеет определитель, отличный от нуля)

имеет единственное решение (по теореме Крамера).

Нужно найти функции $v_1(x)$, $v_2(x)$ и подставить их в представление (1) для частного решения.

$$u = v_1(x) y_1 + v_2(x) y_2 .$$

Линейные уравнения высших порядков:

Линейными однородными уравнениями n-го порядка называется уравнение вида:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \qquad (1)$$

$\exists$ коэф-ы $p_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots n$

являются непрерывными ф-ции на $[a, b]$ ($x \in [a, b]$).

$\exists\, y_1, y_2, \ldots, y_k$ - решения ур-я (1).

Тогда $\sum_{i=1}^{k} C_i y_i$ —

- также решение ур-я (1) при произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_k$.

Доказательство этого факта следует из линейкорни ур-я (1).

Теорема $\exists!$ (существования и единственности решения) уравнения (1) формулируется так же, как и для ур-я II порядка, причём начальные условия имеют вид:

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0;\quad y'\Big|_{x=x_0} = y_0';\ \ldots;\quad \ldots\ y^{(n-1)}\Big| = y_0^{(n-1)}. \qquad (\ast)$$

(n условий)

$x=x_0$

Решения $y_1, y_2, \ldots, y_k$ уравнения (1) назыв-ся линейно независимыми, если между ними не $\exists$ тожд. относ. x соотношения

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i y_i = 0, \quad k \le n$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_2$ - постоянные, не равные нулю одновременно.

Если $y_1, y_2, \dots, y_n$

– n линейно независ. решений

ур-я, то формула

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n \quad (2)$$

дает все решения

ур-я (1).

Располагая набором

постоянных $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$

можно получить решение

ур-я (1), удовлетв-ее

$\forall$ набору начальных условий (★).

Линейные неоднородные дифф. ур-я n-го порядка

★ уравнение вида

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots$$
$$\ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \quad (3)$$

Пусть u_1 – какое-либо решение ур-я (3),

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ – л. н. решения соответств-его однородного ур-я (1), то формула

$$u = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} c_i y_i}_{} + \underbrace{u_1}_{}$$

(c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ – произв. постоянные).

дает общее решение

уравнения (3).

При этом, если

$y_1, y_2, \dots, y_n$ известны,

то частное решение u_1

может быть получено

по формуле

$$u_1 = v_1(x) y_1 + v_2(x) y_2 + \dots + v_n(x) y_n$$

где $v_1'(x), v_2'(x), \dots, v_n'(x)$

определяется из системы

уравнений:

$$\begin{cases} v_1'(x)y_1 + v_2'(x)y_2 + \ldots + v_n'(x)y_n = 0 \\ v_1'(x)y_1' + v_2'(x)y_2' + \ldots + v_n'(x)y_n' = 0 \\ \text{---------------------------} \\ v_1'(x)y_1^{(n-2)} + v_2'(x)y_2^{(n-2)} + \ldots + v_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0 \\ v_1'(x)y_1^{(n-1)} + v_2'(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + v_n'(x)y_n^{(n-1)} = \\ \qquad = f(x) \end{cases} \qquad (4)$$

Укажем необходимое и достаточное условие линейной незав-сти решений одндр. уравнения, аналогичное тому, которое было дано для уравнения II порядка.

Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – решения ур-я (1) – однородного ур-я n-го порядка.

Определителем Вронского этих решений называется следующий определитель n-го порядка:

$$\Delta(y_1, y_2, \ldots, y_n) =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \ldots & y_n'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} .$$

Для него можно доказать формулу, аналогичную формуле для определителя Вронского II порядка:

$$\Delta(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \Delta_0 e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(t)\,dt}. \qquad (5)$$

Здесь Δ_0 – значение $\Delta(x)$ в точке $x = x_0$.

Из формулы (5) (как и в случае ур-я II порядка) вытекает,

что опред-ль Вронского
или тождественно равен
нулю или не обр-ся
в ноль ни для какого
значения x (на области
непрерывности функц
коэф-ов $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$).

Т.о. $\Longleftrightarrow$ условие
линейной незав-ти
решений ур-я n-го
порядка состоит в том,
что их определитель

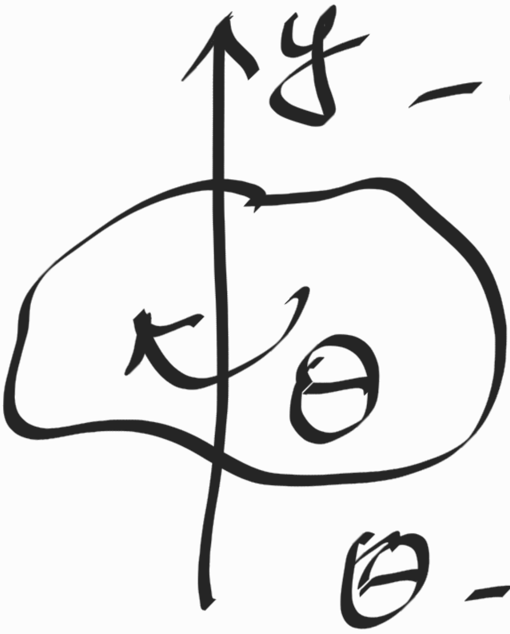
Вронского не равен тождественно нулю.

При этом по ∀ начальным условиям вполне определяются произвольные постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$ формулы:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i .$$

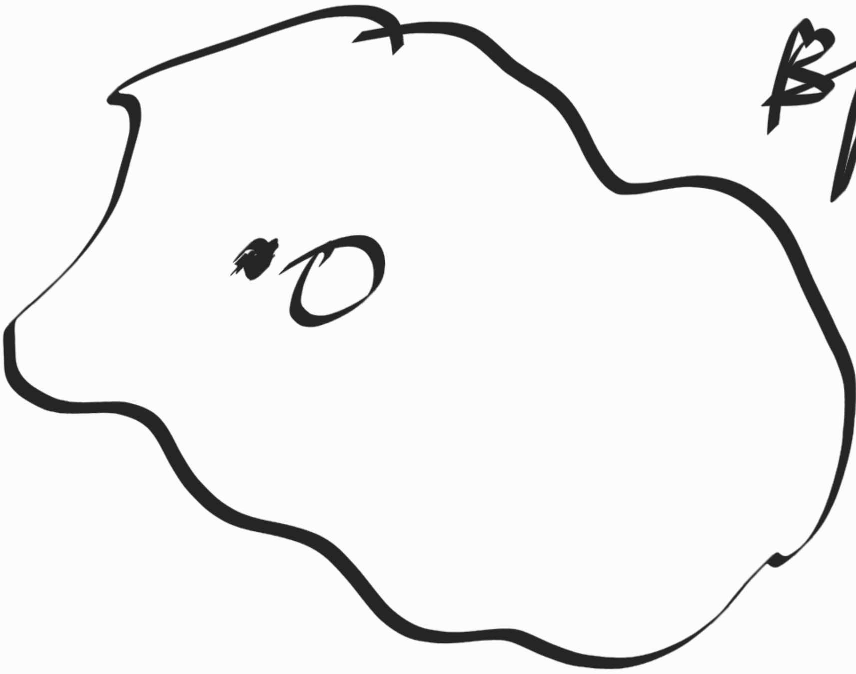
§ Системы линейных уравнений с постоянными коэф-ми.

Часто полож. механической системы опред-ся некоторым набором параметров $q_1, q_2, \dots, q_k$. Здесь индекс k определяет число степеней свободы системы.



y – ось вращения тв. тела.

θ – угол поворота, одна степень свободы.



Вращение всего тела вокруг неподвижной точки определяется тремя степенями

Свободы: углы Эйлера
φ, ψ, θ.

Движение пол-ов-ти определ-ся двумя степенями свободы.

Малые колебания системы около точки равновесия, которому соотв-ет значение параметров:

$$q_1 = q_2 = q_3 = \dots = q_k = 0$$

В диффер. ур-ях (II закон Ньютона определит систему линейных ур-ий II порядка) удерживают лишь члены первого порядка q_s, $q_s'(t)$

$$\left[\; q_s^{4}(t) + \alpha_{s1} q_s'(t) + \alpha_{s2} q_s(t) = \right.$$

$$= f_s(t)\,]$$

$$\Big[\, q_s''(t) + \alpha_{s1}\, q_s'(t) +$$

$$+ \beta_{s-1}\, q_{s-1}'(t) = f_s(t) + f_{s+1}(t)$$

$$\cancel{(q_s')^m}, \quad m > 1$$

$$\cancel{(q_s)^m}, \quad m > 1$$

Получена система линейных уравнений

с постоянными коэф-ми.

Прием V из уравнений может, вообще говоря, содержать все функции $q_s(t)$, $q_s'(t)$, $q_s''(t)$.

<u>Пример</u>:

$\Rightarrow$ систему для $y(x), z(x)$:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} = z + x & (1) \\ \dfrac{d^2z}{dx^2} = y + 2x & (2) \end{cases}$$

Решение:

из (1) $\Rightarrow$ $z = y^{4} - x$

из (2) $\Rightarrow$

$$y^{(IV)} = y + \cancel{2x} \qquad (3)$$

Свели систему двух уравнений II порядка к одному ур-ю IV порядка

Однор. ур-е, соотв. ур-ю (3):

$$y^{(IV)} - y = 0$$

$\underline{\lambda^4 - 1 = 0}$ – характер. ур-е

$$(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = i, \quad \lambda_4 = -i$$

$$\varkappa_1 = 1, \quad \varkappa_2 = 1, \quad \varkappa_3 = 1, \quad \varkappa_4 = 1$$

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x +$$

$$+ C_4 \sin x$$

$$z(x) \overset{(1)}{=} y'' - x =$$

$$= C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} - C_3 \cos x -$$

$- C_4 \sin x - x$.

Решение получено.