Лекция 8.12.21

§ Линейные однородные ур-я II порядка.

ЛОУ II порядка — уравнение вида:

$$P(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1).$$

Из линейности (1) следует, что:

1) $P(Cy) = CP(y) = 0$

2) $P(C_1 y_1 + C_2 y_2) =$

$= C_1 P(y_1) + C_2 P(y_2)$.

Если y_1, y_2 – решения

ур-я (1) $\Rightarrow$

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ –

– также решение ур-я (1)

[Здесь C_1, C_2 – постоянные]

Ǝ $p(x), q(x) \in C_{[a,b]}$

Теорема существования и единственности решения для ур-я (1):

$\exists\ p, q \in C_{[a,b]}$,

$x_0 \in (a,b)$

Тогда: $\exists!$ решение уравнения (1) (существует и единственно), удовлетворяющее начальным условиям:

$$\left\{ y \Big|_{x=x_0} = y_0 \right.$$

$$\begin{cases} y'\big|_{x=x_0} = y_0' \quad (*) \\ y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \end{cases}$$

Отметим, что система (*) называется задачей Коши для уравнения II порядка.

Здесь y_0, y_0' – любые заданные числа.

Решение задачи Коши ∃ во всём промежутке

$a < x < b$.

Для доказательства теоремы $\exists!$ решения ур-е (1) сводится к системе двух уравнений I порядка. К системе применяется метод последов. приближений. В.И. Смирнов "Курс высшей математики".

Ввиду произвольности параметров x_0, y_0, y'_0 $\{$ решения ур-я (1) рассмотр-ся в дальнейшем на области непрер-ти функций $p(x)$, $q(x)$ }

уравнение (1) не имеет особых решений.

особым решением ур-я

называется такое решение в каждой (-) которого единственность нарушается.

Два решения y_1, y_2 уравнения (1) назыв-ся линейно независимыми,

если не $\exists$ тождества
(относит. x)

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0$$

при $\forall$ α_1, α_2 отличных

от нуля.

Иначе говоря:

$$\frac{y_1}{y_2} \neq const,$$

или:

(0)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = \frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2} \not\equiv 0$$

$\measuredangle\ \Delta(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1'$

– определитель Вронского решений y_1, y_2.

Св-во определителя Вронского (Вронскиана):

$$\Delta(y_1, y_2) = \Delta_0 e^{-\int_{x_0}^{x} p(x')dx'} \quad (*)$$

(Теорема Лиувилля).

здесь $\Delta_0 = \Delta(y_1, y_2)\big|_{x=x_0}$

Д-во теоремы Лиувилля:

1) $\measuredangle \dfrac{d\Delta(y_1, y_2)}{dx} =$

$$= \cancel{y_1' y_2'} + y_1 y_2'' - \cancel{y_2' y_1'} - y_2 y_1'' =$$

$$= y_1 y_2'' - y_2 y_1''$$

С другой стороны:

$$\begin{cases} y_1'' + p(x) y_1' + q(x) y_1 = 0, & (2) \\ y_2'' + p(x) y_2' + q(x) y_2 = 0 & (3). \end{cases}$$

Умножим (2) на $(-y_2)$, умножим (3) на y_1 и сложим их почленно:

$$\underbrace{y_1 y_2'' - y_2 y_1''}_{\frac{d\Delta''}{dx}} + p(x)\underbrace{(y_1 y_2' - y_2 y_1')}_{\Delta''} = 0$$

$$\frac{d\Delta(y_1, y_2)}{dx} + p(x)\Delta(y_1, y_2) = 0$$

$$\frac{d\Delta}{\Delta} = -p(x)\,dx$$

$$\Delta = \Delta_0 e^{-\int_{x_0}^{x} p(x')\,dx'} \qquad (4)$$

Отсюда: $\Delta(y_1, y_2) \equiv 0$,

если $\Delta_0 = 0$

или

$$\Delta(y_1, y_2) \neq 0$$

для всех $x \in (a, b)$.

Рассмотрим условие (0), используя (4):

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{\Delta(y_1, y_2)}{y_1^2} =$$

$$= \Delta_0 \frac{e^{-\int_{x_0}^{x} p(x')dx'}}{y_1^2}, \qquad (5)$$

Отсюда $\Rightarrow$, что для решения y_1, y_2 ур-я (1) линейно независимы $\Leftrightarrow$ когда $\Delta(y_1, y_2) \neq 0$, т.е. $\Delta_0 \neq 0$.

Утверждение:

Пусть y_1, y_2 - линейно незав. р-я ур-я (1).
Тогда при надлежащем выборе постоянных C_1, C_2 выражение

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \qquad (5')$$

дает решение ур-я (1)

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = 0,$$

удовлетворяющее $\forall$ наперед заданным начальным условиям

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0, \quad y'\Big|_{x=x_0} = y_0' \; . \qquad (6)$$

<u>Док-во</u>:

введем обозначения:

$$y_1(x_0) = y_{10}, \quad y_2(x_0) = y_{20},$$

$y_1(x_0) = y'_{10}$, $y'_2(x_0) = y'_{20}$.

Для того чтобы удовл-ть начальным условиям (6), нужно определить C_1, C_2 в ур-ии (5'):

$$\begin{cases} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} = y_0, & (6') \\ C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} = y'_0. \end{cases}$$

Из линейной нез-ти решений $y_1, y_2 \Rightarrow$

$$\Delta_0 = y_{10} y'_{20} - y_{20} y'_{10} \neq 0.$$

Запишем систему (6') в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y'_{10} & y'_{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}.$$

$D = \Delta_0 \neq 0$.

По теореме Крамера для $\forall$ нач. условий y_0, y'_0 пара C_1, C_2 будет однозначно определена.

В силу Теоремы $\exists!$ решения ур-я (1) всякое решение ур-я вполне определяется двумя начальными условиями (y_0, y_0')

Тогда решение

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad (**)$$

описывает решение, определяемое $\forall$ парой нач. условий.

Тогда $\forall$ решение задачи Коши

описывается ур-ем (**).

<u>Утверждение</u>: если y_1, y_2 - два линейно независимых решения ур-я (1), то формула (**) дает <u>все решения этого уравнения</u> ■

Т.о. задача о решении ур-я (1) привод-ся к задаче о нахождении (двух) y_1, y_2 - его ЛН решений.

Пусть y_1 - одно из решений

этого ур-я

y_2 - какое-либо его решение.

Тогда интегрируем

ур-е (5):

$$\frac{y_2}{y_1} = \Delta_0 \int e^{-\int_{x_0}^{x} p(x')\,dx'} \frac{dx}{y_1^2(x)}$$

или:

$$y_2 = \Delta_0 y_1 \int e^{-\int_{x_0}^{x} p(x')\,dx'} \frac{dx}{y_1^2(x)} \quad (7).$$

Т.о., если известно р-е y_1, то y_2 находится из (7).

§ Линейные неоднородные уравнения II порядка.

ЛНУ II порядка называется ур-е вида

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x) \quad (1)$$

Если $p(x), q(x), f(x) \in C$ (2)

в промежутке $a < x < b$,

то мы получим такую же теорему ∃ и ед-ти решения, что и для однородного ур-я.

Пусть $u = u_1$ есть частное решение ур-я (1);

$$u_1'' + p(x)u_1' + q(x)u_1 = f(x) \qquad (3)$$

Введем вместо u_1 новую функцию y:

$$u = y + u_1 \qquad (4)$$

из ур-я (1) $\Rightarrow$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y + $$
$$+ [u_1'' + p(x)u_1' + q(x)u_1] = f(x)$$

в силу ур-я (3):

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (5)$$

Если y_1, y_2 – два линейно независ. решения ур-я (5), то общее решение ур-я (1) принимает вид:

$$u = C_1 y_1 + C_2 y_2 + u_1, \quad (5')$$

где C_1, C_2 - произв. постоянные.

Т.о. (5') дает все решения ур-я (1) (неоднородного ур-я).

<u>Утверждение</u>:

общее решение ЛНУ <u>II</u> порядка равно сумме общего решения соот-ветствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения неоднородного уравнения.

$\exists$ известны два линейно независимых решения однородного ур-я:

$$y'' + p(x)y' + q(x) = 0, \quad (*)$$

Тогда можно найти и частное решение неоднородного ур-я

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (**)$$

а, следовательно, и его общее решение.
Применим метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).

Метод Лагранжа.

$\exists$ y_1, y_2 – два л.н. решения ур-я (*).
Тогда общее решение однородного ур-я принимает вид:

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$

Будем искать решение ур-я (**) в виде:

$$u = v_1(x) y_1 + v_2(x) y_2 \qquad (***)$$

(заменим постоянные C_1, C_2 на функции $v_1(x), v_2(x)$)

Имея не одну, а две искомые функции – подчиним их ещё одному дополнительному условию:

$$v_1'(x) y_1 + v_2'(x) y_2 = 0 \qquad (1^*)$$

Дифференцир-уя выражение (***) и пользуясь условием ($\tilde{i}$), получим:

$$
\left.\begin{aligned}
u &= v_1(x)y_1 + v_2(x)y_2 \\
u' &= v_1(x)y_1' + v_2(x)y_2' \\
u'' &= v_1(x)y_1'' + v_2(x)y_2'' + \\
&\quad + v_1'(x)y_1' + v_2'(x)y_2'
\end{aligned}\right|
\begin{aligned}
&\times q(x) \\
&\times p(x) \\
&\times 1 \\
&
\end{aligned}
$$

Подставим результат в левую часть ур-я (**):

$$v_1(x)\underbrace{\left[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1\right]}_{0} +$$

$$+v_2(x)\underbrace{\left[y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2\right]}_{0}+$$

$$+v_1'(x)y_1'+v_2'(x)y_2'=f(x)$$

<u>Получим систему</u>

<u>ур-ий:</u>

$$\begin{cases} v_1'(x)\,y_1+v_2'(x)\,y_2=0 \\ v_1'(x)\,y_1'+v_2'(x)\,y_2'=f(x) \end{cases} \qquad (\tilde{2}).$$

для опред-я $v_1'(x)$ и $v_2'(x)$.