Лекция 30.11.21

Линейные диф. ур-я с постоянными коэф-ми. Продолжение.

Пример:

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (*)$$

$x \in [x_1, x_2]$,

$|x_1| < \infty$, $|x_2| < \infty$

Ищем р-е ур-я $(*)$ в виде: $e^{\lambda x}$

$(\lambda^2+p\lambda+q)e^{\lambda x}=0$

$\lambda^2+p\lambda+q=0$ – ~~хар~~ характеристический полином.

$\exists\ \lambda_1, \lambda_2$ – его корни.

$\exists\ \lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1-\lambda_2 \to 0$

$\exists$: $\lambda_1=\lambda_2+\varepsilon$, где

$0<\varepsilon\ll 1$

Будем искать р-е ур-я (*) в виде:

$$y=\frac{e^{\lambda_1 x}-e^{\lambda_2 x}}{\lambda_1-\lambda_2}. \qquad (**)$$

Поскольку $e^{\lambda_1 x}$ и $e^{\lambda_2 x}$

- решения ур-я (*),

то $\forall$ их лин. комб-я также будет решением. В частности, (**) также будет решением.

$$\forall \; y = \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}}{\lambda_1 - \lambda_2} \xrightarrow[\lambda_1, \lambda_2 \to \lambda_0]{}$$

$$\to \frac{e^{\lambda_2 x}(1 + \varepsilon x + O(\varepsilon^2)) - e^{\lambda_2 x}}{\varepsilon}$$

$$\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} x e^{\lambda_0 x}.$$

Проверим, что $y = x e^{\lambda_0 x}$ тоже решение ур-я (**) при $\lambda_1, \lambda_2 \to \lambda_0$, имеется два одинаковых корня характ. ур-я, корень имеет кратность вырождения $\underline{\underline{2}}$.

Тогда:

$$\lambda^2+p\lambda+q=(\lambda-\lambda_0)^2$$

Тогда: $\underline{\underline{q=\lambda_0^2}}$, $\underline{\underline{p=-2\lambda_0}}$.

Введем обозначение

$D\equiv\frac{d}{dx}$ - оператор дифференцир-я.

Запишем ур-е (*) в след. виде:

$$(D^2+\underline{pD}+q)\underbrace{xe^{\lambda_0 x}}=$$

$$=x\underline{(\lambda_0^2+\overset{-2\lambda_0}{p}\lambda_0+\overset{\lambda_0^2}{q})}_{0}e^{\lambda_0 x}+$$

$$+\underline{(\underline{2\lambda_0}+\underline{p})}e^{\lambda_0 x}=0$$

$$2\lambda_0+p=0,\quad p=-2\lambda_0$$

Общее решение ур-я (*) имеет вид:

$$y=(C_1x+C_2)e^{\lambda_0 x}\ -$$

- решение ур-я (*) в случае кратных корней.

Символический подход к задаче решения однородные диф. ур-ий n-го порядка с постоянными коэф-ми.

Рассмотрим ур-е:

$$D^n y + a_1 D^{n-1} y + \ldots + a_n y =$$

$$= P(D) y = 0$$

$$\left[y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + y' a_{n-1} + a_n y = 0 \right]$$

Примеры:

1) $D^n y = 0$, $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$

2) $(D-\lambda)^n y = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n$

3) $(D-\lambda_1)^{æ_1}(D-\lambda_2)^{æ_2}\dots$

$\dots(D-\lambda_k)^{æ_k} y = 0$

Имеется k корней характеристич. полинома

Имеется набор $\{æ_1, æ_2, \dots æ_k\}$ кратностей их вырождения

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = n.$$

<u>Случай 1)</u>:

$$D^n y = 0$$

$$y = C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \dots + C_{n-1} x + C_n = P_{n-1}(x)$$

Здесь $C_1, C_2, \dots, C_n$ - набор произвольных постоянных.

<u>Случай 2)</u>;

$$(D - r)^n y = 0$$

Утверждение:

$$D^n(e^{\lambda x}y) = e^{\lambda x}(D+\lambda)^n y$$

Док-во (методом математ. индукции):

] $n=1$

$$D(e^{\lambda x}y) = (e^{\lambda x}y)' =$$

$$= e^{\lambda x}y' + \lambda y e^{\lambda x} = e^{\lambda x}(D+\lambda)y$$

] $D^{n-1}(e^{\lambda x}y) = e^{\lambda x}(D+\lambda)^{n-1}y$

(пусть это справедливо).

Покажем, что утверждение справедливо для случая порядка n дифф. опер-ра.

$$\underline{D^n(e^{\lambda x}y)} = D[D^{n-1}(e^{\lambda x}y)] =$$

$$= D[e^{\lambda x}\underline{(D+\lambda)^{n-1}y}] =$$

$$= e^{\lambda x}(D+\lambda)(D+\lambda)^{n-1}y =$$

$$= e^{\lambda x}(D+\lambda)^n y \quad \blacksquare \qquad (1)$$

Вернемся к ур-ю:

$$(D-\lambda)^n y = 0 \qquad (\ast\ast\ast).$$

Согласно доказанному в ур-ии (1) заменим $\lambda \to -\lambda$:

$$(1):\ e^{-\lambda x}(D-\lambda)^n y = D^n(e^{-\lambda x}y)$$

$$(D-\lambda)^n y = e^{\lambda x} D^n (e^{-\lambda x} y).$$

Из уравнения (***) требуем:

$$e^{\lambda x} \cdot D^n (e^{-\lambda x} y) = 0$$

$$\Rightarrow e^{-\lambda x} y = P_{n-1}(x)$$

$$\Rightarrow y = e^{\lambda x} P_{n-1}(x)$$

Решение ур-я $(D-\lambda)^n y = 0$ найдено.

~~A~~ случай 3):

$$D^n y + a_1 D^{n-1} y + \ldots + a_{n-1} D y + a_n y = 0. \quad (\#)$$

Соответствующее характеристическое ур-е принимает вид:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

Оно сводится к виду:

$$(\lambda-\lambda_1)^{\varkappa_1}(\lambda-\lambda_2)^{\varkappa_2}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{\varkappa_k}=0$$

Здесь: $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ — корни характеристич. ур-я, $\varkappa_1,\varkappa_2,\dots,\varkappa_k$ — кратности вырождения этих корней

$\varkappa_1+\varkappa_2+\dots+\varkappa_k=n$,

где n — порядок исходного диф.-ого ур-я.

Уравнение (#) запишем в виде:

$$(D-\lambda_1)^{\varkappa_1}(D-\lambda_2)^{\varkappa_2}\cdots(D-\lambda_k)^{\varkappa_k}y=0$$

Докажем, что :

$$y = e^{\lambda_1 x} P_{1,\varkappa_1 - 1}(x) + e^{\lambda_2 x} P_{2,\varkappa_2 - 1}(x) + \ldots$$

$$\ldots + e^{\lambda_k x} P_{k,\varkappa_k - 1}(x) . \quad (4)$$

Приступим к доказательству :

1) Утверждение :

$$\left(e^{\lambda x} P_n(x)\right)' = e^{\lambda x} \tilde{P}_n(x),$$

$$\lambda \neq 0 .$$

Доказательство :

$$\left[e^{\lambda x} P_n(x)\right]' = \lambda e^{\lambda x} P_n(x) +$$

$$+e^{\lambda x}P_n'(x)=$$

$$=e^{\lambda x}\underbrace{\left(\lambda P_n(x)+P_n'(x)\right)}_{\tilde{P}_n(x)}. \blacksquare$$

Доказательство структуры (4) решения ур-я 3).

(Методом математ. индукции).

1) $\exists$ количество различных корней характер. ур-я равно единице, $k=1$.

$(D-\lambda_1)^{\varkappa_1} y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = e^{\lambda_1 x} P_{\varkappa_1 - 1}(x)$

(по доказанному выше).

2) ∃ имеется к−1 корень характеристического ур-я.

Тогда по <u>предположению</u>:

$(D-\lambda_1)^{\varkappa_1} \dots (D-\lambda_{k-1})^{\varkappa_{k-1}} y = 0$

$y = e^{\lambda_1 x} P_{1, \varkappa_1 - 1}(x) + e^{\lambda_2 x} P_{2, \varkappa_2 - 1}(x) + \dots$

$\dots + e^{\lambda_{k-1} x} P_{k-1, \varkappa_{k-1} - 1}(x)$

3) Рассмотрим случай k корней (различных) характеристич. полинома

$$\underbrace{(D-\lambda_1)^{\varkappa_1}\ldots(D-\lambda_{k-1})^{\varkappa_{k-1}}}_{}\underbrace{(D-\lambda_k)^{\varkappa_k}y}_{= z}=0$$

По предположению

$$z=e^{\lambda_1 x}\tilde{P}_{1,\varkappa_1-1}(x)+\ldots+e^{\lambda_{k-1}x}\tilde{P}_{k-1,\varkappa_{k-1}-1}(x)$$

$$e^{-\lambda_k x}z=e^{-\lambda_k x}(D-\lambda_k)^{\varkappa_k}y=$$

$$=D^{\varkappa_k}\left(e^{-\lambda_k x}y\right)=$$

$$= e^{(\lambda_1-\lambda_k)x}\tilde{P}_{1,\varkappa_1-1}(x)+\ldots+$$

$$+ e^{(\lambda_{k-1}-\lambda_k)x}\tilde{P}_{k-1,\varkappa_{k-1}-1}(x)$$

Проинтегрируем $\varkappa_k$ раз, основываясь на утверждении о диффер-ии

$$\left(e^{\lambda x}\cdot\tilde{P}_n(x)\right)'=e^{\lambda x}P_n(x)$$

при $\lambda\neq 0$;

Получим:

$$e^{-\lambda_k x} y = e^{(\lambda_1-\lambda_k)x} P_{1,\varkappa_1-1}(x) + \ldots$$

$$\ldots + e^{(\lambda_{k-1}-\lambda_k)x} P_{k-1,\varkappa_{k-1}-1}(x) +$$

$$+ P_{k,\varkappa_k-1}(x);$$

$$\Rightarrow y = e^{\lambda_1 x} P_{1,\varkappa_1-1}(x) + \ldots +$$

$$+ e^{\lambda_{k-1} x} P_{k-1,\varkappa_{k-1}-1}(x) + e^{\lambda_k x} P_{\varkappa_k-1}(x)$$

$\blacksquare$

Теорема: общее решение ЛОДУ с постоянными коэф-ми n-го порядка имеет вид:

$$y = \sum_{j=1}^{k} e^{\lambda_j x} P_{j,\,\varkappa_k - 1}(x),$$

где λ_j, $j = 1, 2, \ldots, k$ — корни характеристич. ур-я, $\varkappa_j$ — их кратности,

$$\sum_{j=1}^{k} \varkappa_j = n,$$

$P_j(x)$ - полиномы j, $\varkappa_j - 1$ порядка $\varkappa_j - 1$, с произвольными коэфф-ми.

<u>Пример</u>:

$$y''' - 4y'' + 4y' = 0$$

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 0$$

$$\underline{\lambda_1 = 0}, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2$$

$$y(x) = \underbrace{C_1} + (C_2 x + C_3)e^{2x}$$

$0 =$

$$e^{\lambda_1 x} P_{1-1}(x) = e^{0 \cdot x} \cdot C_1$$

$= 0$

$2 =$

$$e^{\lambda_2 x} P_{2-1}(x) = e^{2x} \cdot (C_2 x + C_3)$$