Лекция 27.10.21

Формула Остроградского-Гаусса.

$\exists$ V - область в $\mathbb{R}^3$
$S = \partial V$ (пов-ть, ограничивающая обл-ть V).

$\exists$ функции $P, Q, R \in C^1(V)$

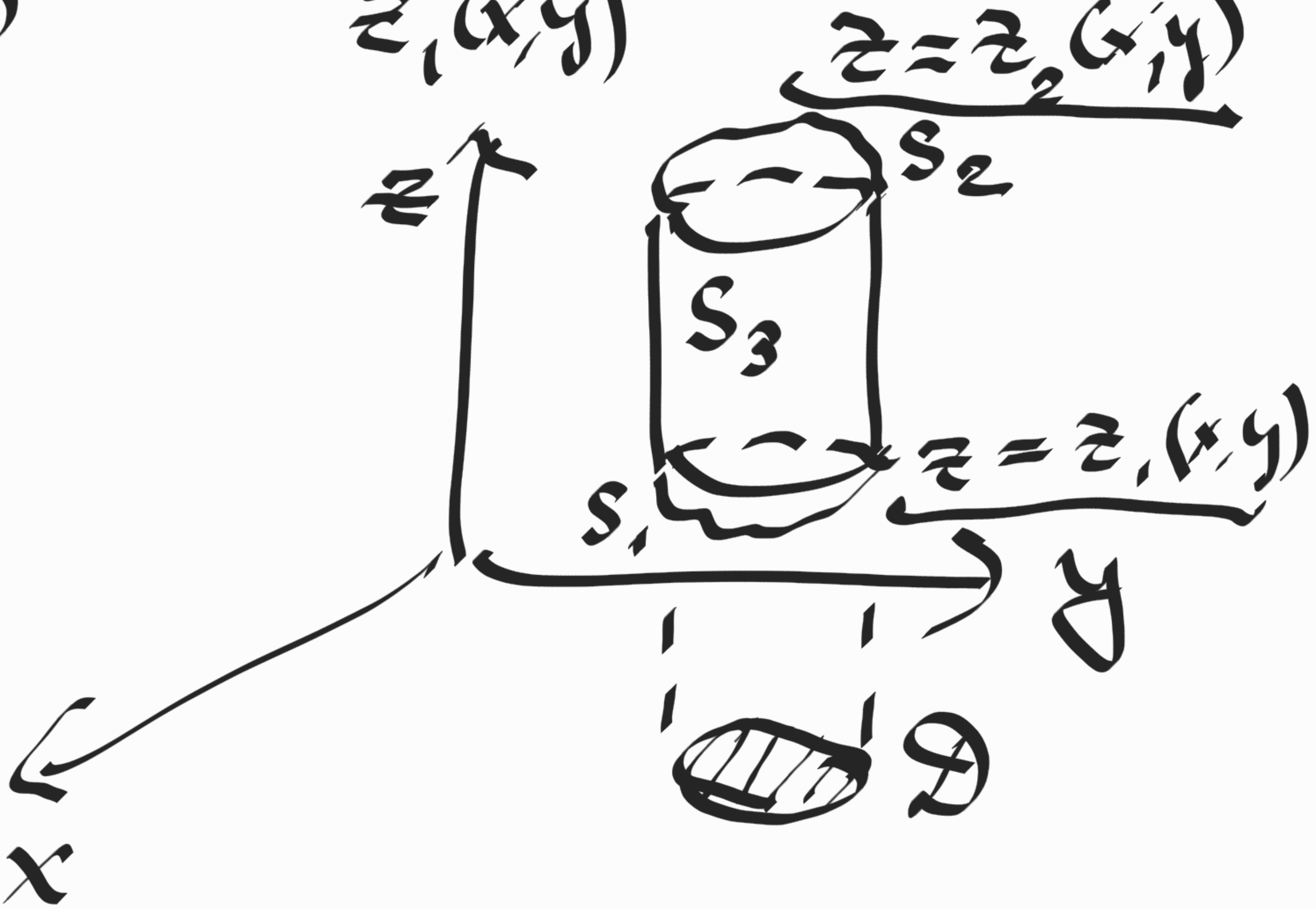
Тогда:

$$\iint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

Доказ-во: Т. Фубини

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz =$$

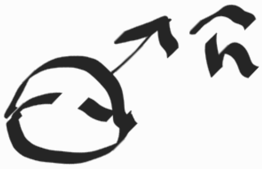
$$= \iint\limits_D dx\,dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz =$$



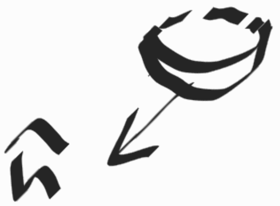
$$= \iint\limits_D dx\,dy\; R(x, y, z_2(x,y)) -$$

$$-\iint_{D} dx\,dy\, R(x, y, z_1(x,y)) =$$

$$= \iint_{S_2} R(x,y,z)\,dx\,dy \; +$$



$$+ \iint_{S_1} R(x,y,z)\,dx\,dy \; +$$



$$+ \iint_{S_3} R(x,y,z)\,dx\,dy \; =$$

$$\underbrace{\left(\langle \vec{F}, \hat{n} \rangle = 0 \right)}_{0}$$

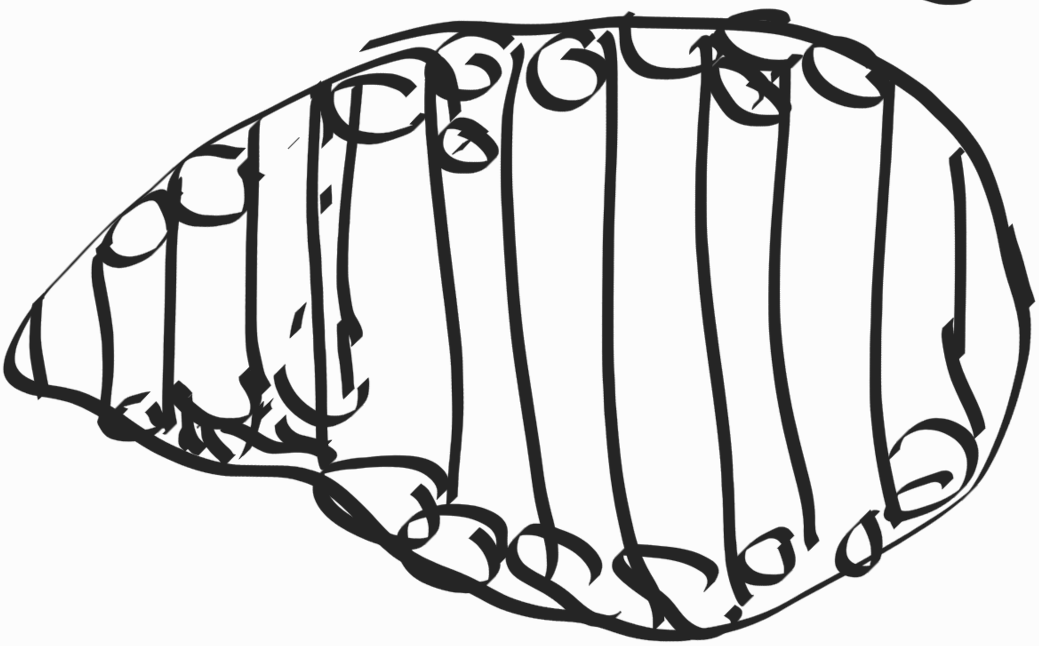
$$= \iint\limits_{S} R\,dx\,dy \qquad (1)$$

Замечание

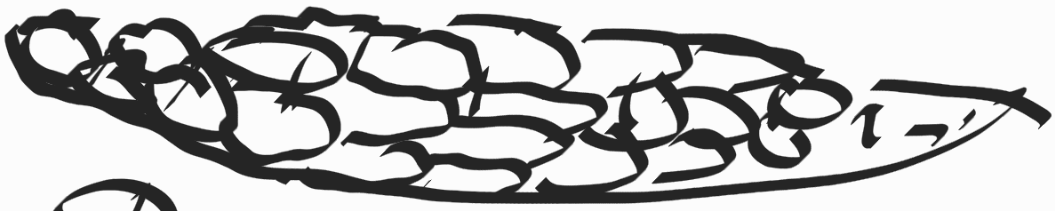
Для произвольной обл-ти (не обязательно цилиндрической)

Эта формула также применима.

$S = \partial V$



V



D

Разбиваем объём на цилиндрические области, к $\forall$ области применяем полученную формулу и складываем результаты.

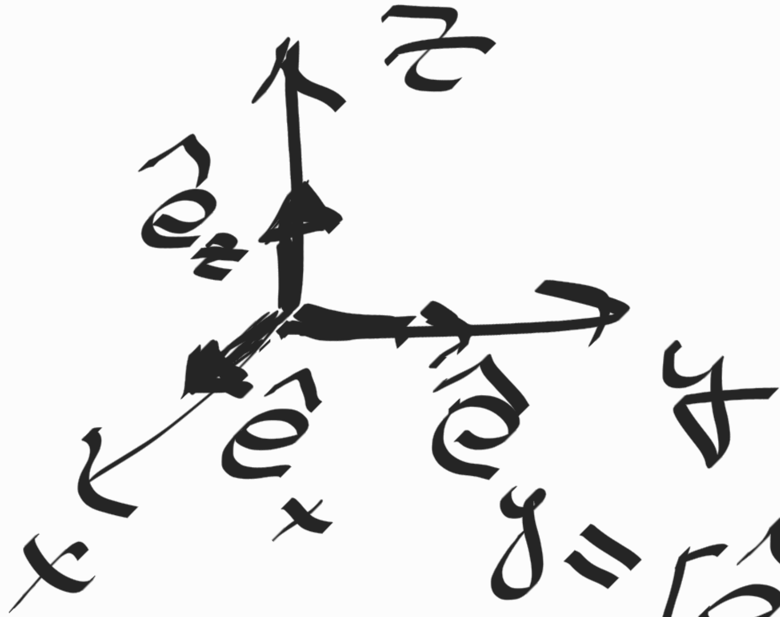
Аналогично:

(2)

$$\iiint\limits_V \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \oiint\limits_S P\,dy\,dz$$

(3)

$$\iiint\limits_V \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_D dz\,dx \int\limits_{y_1(z,x)}^{y_2(z,x)} dy\,\frac{\partial Q}{\partial y}$$



$$\hat{e}_y = [\hat{e}_z, \hat{e}_x]$$

Складывая выр-я (1), (2), (3), получим ф-лу Остроградского-Гаусса. ■

<u>Пример</u>:

Вычисление интеграла Гаусса:

$$4)\quad \oiint_S \frac{\cos(\vec r, \vec n)}{r^2}\, dS =$$

$$\vec r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \cos(\vec r, \vec n) = \langle \hat r, \hat n \rangle$$

$$= \oiint_S \frac{\langle \vec r, \hat n \rangle}{r^3}\, dS =$$

$$= \oiint_S \frac{x}{r^3}\, dy\, dz + \frac{y}{r^3}\, dz\, dx + \frac{z}{r^3}\, dx\, dy$$

1) S не охватывает точку $\vec r = 0$. $(0,0,0)$

$$P \equiv \frac{x}{r^3}, \quad Q \equiv \frac{y}{r^3}, \quad R \equiv \frac{z}{r^3}$$

($P, Q, R \in C^1(V)$, т.е. справедлива ф-ла Остроградского-Гаусса)

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) = r^{-3} - 3r^{-4}\frac{x^2}{r} =$$

$$\left(r \equiv \sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$

$$= r^{-3} - 3\frac{x^2}{r^5}; \qquad (4)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{1}{r^3} - 3\frac{y^2}{r^5}; \qquad (5)$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{1}{r^3} - 3\frac{z^2}{r^5}; \qquad (6)$$

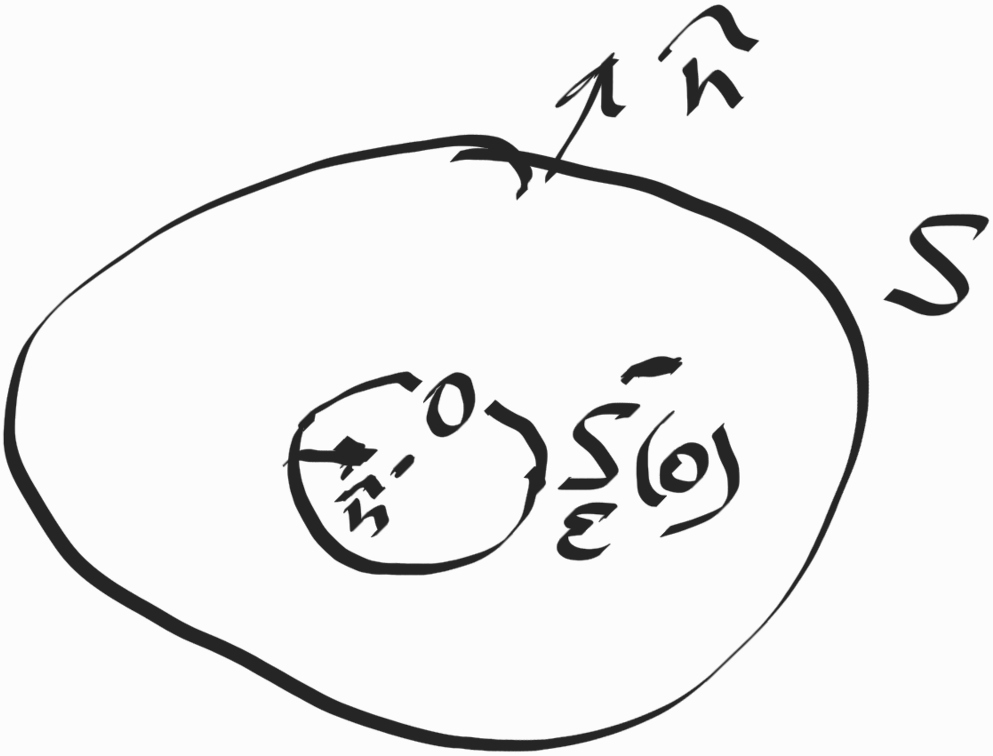
Сложим выр-я (4), (5), (6):

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0.$$

Т.о. $\oiint\limits_S \frac{\cos(\bar{r},\bar{n})}{r^2}\,ds=0$ ■

г) $\measuredangle$ случай, когда (·) $\vec{r}=0$ охватывается поверхностью S.

$$\measuredangle \oiint\limits_{S\cup \bar{S}_\varepsilon(0)} \frac{\cos(\bar{r},\bar{n})}{r^2}\,ds=$$



$$= \iiint\limits_{\tilde{V} = (V \setminus U_\varepsilon(O))} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx\,dy\,dz =$$

$$= 0;$$

Т.о. $$\iint\limits_{S \cup \bar{S}_\varepsilon(O)} \frac{\cos(\bar{r}, \bar{n})}{r^2}\, dS = 0 \qquad (7)$$

$$\iint\limits_{S} \frac{\cos(\bar{r},\bar{n})}{r^2}\,ds =$$

$$= -\iint\limits_{S_\varepsilon^-(0)} \frac{\cos(\bar{r},\bar{n})}{r^2}\,ds =$$

$$= \iint\limits_{S_\varepsilon^+(0)} \frac{\cos(\bar{r},\bar{n})}{r^2}\,ds =$$

$$= \iint \frac{x}{r^3}\,dy\,dz + \frac{y}{r^3}\,dz\,dx +$$

$$x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$$

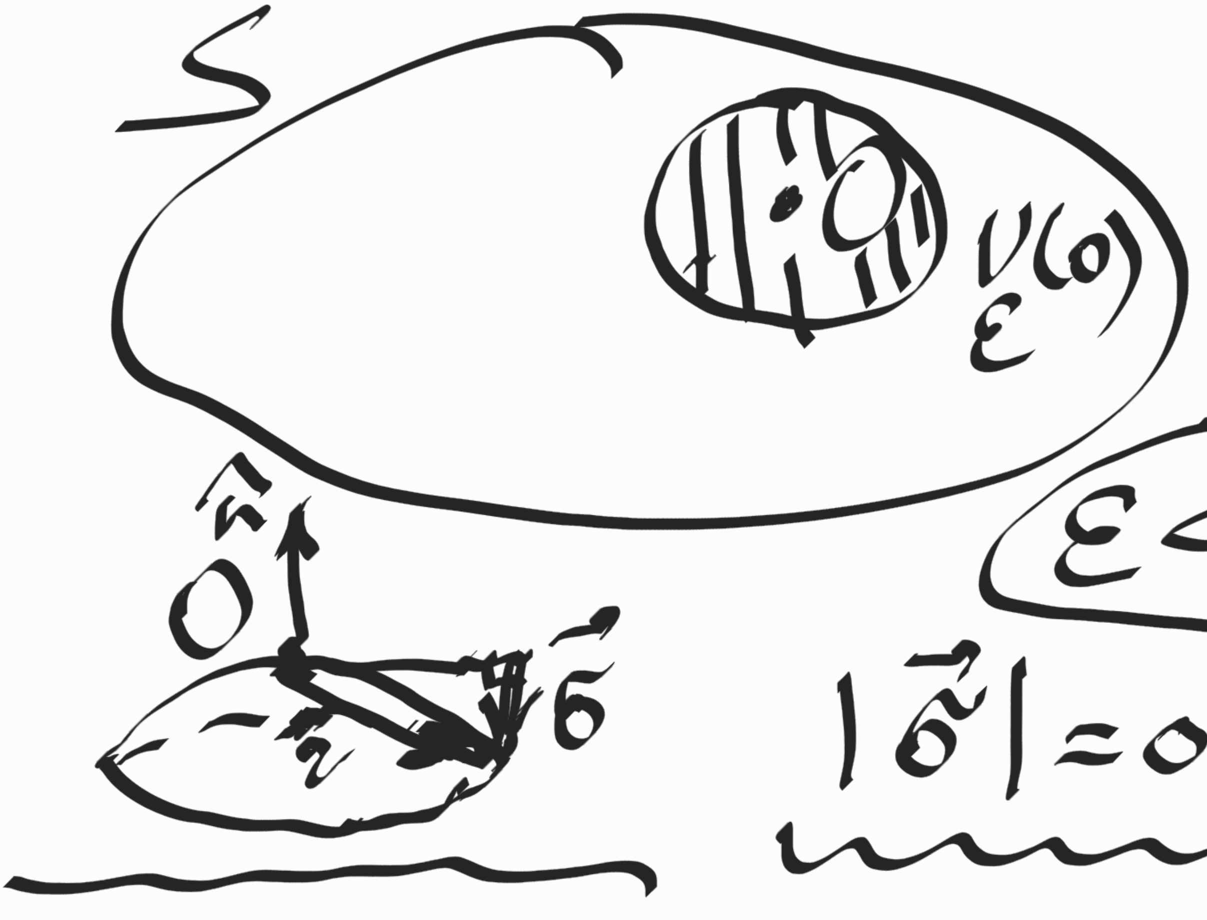
$$+ \frac{z}{r^3}\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^3} \iint\limits_{S_\varepsilon^+(0)} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy =$$

(посчитали на прошлой лекции)

$$= \frac{1}{\varepsilon^3} 4\pi R^3 \Big|_{R=\varepsilon} = 4\pi$$

3) $\exists$ сингулярная точка лежит на поверхности



$\varepsilon \ll 1$

$|\vec{b}| = o\,|\vec{r}|$

$$\cos(\vec{r},\vec{n}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{|\bar{\sigma}|}{|\vec{r}|}\right) =$$

$$= \cos\frac{\pi}{2}\cos\left(\arcsin\left(\frac{|\bar{\sigma}|}{|\vec{r}|}\right)\right) -$$

$$-\sin\frac{\pi}{2}\sin\left(\arcsin\left(\frac{|\bar{\sigma}|}{|\vec{r}|}\right)\right) =$$

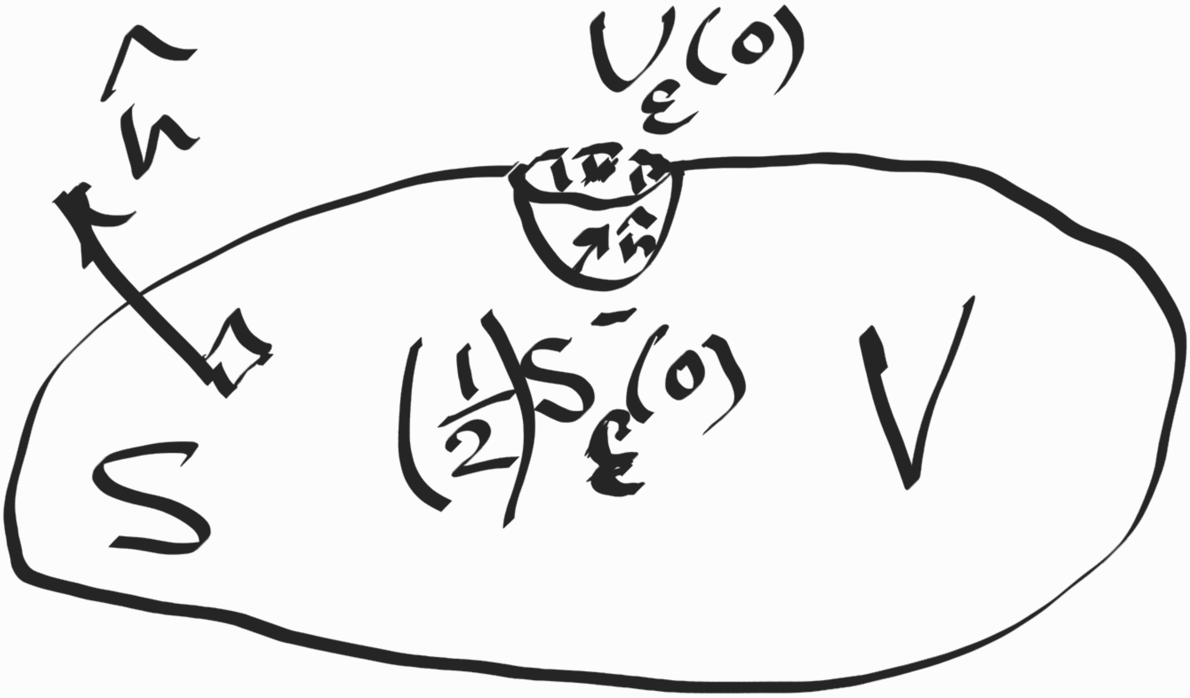
$$= -\frac{|\bar{\sigma}|}{|\vec{r}|} = -\frac{r^{1+\delta}}{r} = O(r^{\delta})$$

$$\iint\limits_{U_{\varepsilon}(0)} \frac{\cos(\bar{r},\bar{n})}{r^2}\,ds =$$

$$\leq \iint\limits_{\tilde{U}_{\varepsilon}(0)} \frac{c \cdot r^{\delta} \cdot r\,dr\,d\varphi}{r^2} =$$

$$= C_1 \int_0^{\varepsilon} r^{\delta-1}\, dr \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

(несобств. инт. в огр. обл-ти)



$S = \partial V$

$$\cancel{*} \iint \frac{\cos(\bar{r}, \bar{n})}{r^2}\, dS = 0$$

$$\left(S \setminus U_\varepsilon(0)\right) \cup \left(\left(\tfrac{1}{2}\right) S_\varepsilon^-(0)\right)$$

полусфера

$$\iint\limits_{S} \frac{\cos(\bar{r},\bar{n})}{r^2}\,ds =$$

$$= \iint\limits_{\frac{1}{2}S^+_\varepsilon(0)} \frac{\cos(\bar{r},\bar{n})}{r^2}\,ds = 2\pi,$$

∎

Формула Стокса.

$\exists$ S - ориентированная поверхность,

S задается дифференци-руемым отображением

] $\Gamma = \partial S$ (граница S),

] $P, Q, R \in C^1(V)$

обл-ть V включает пов-ть S.

(P, Q, R заданы вокр-ти S).

<u>Тогда</u>:

$$\oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz +$$

$$+ \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

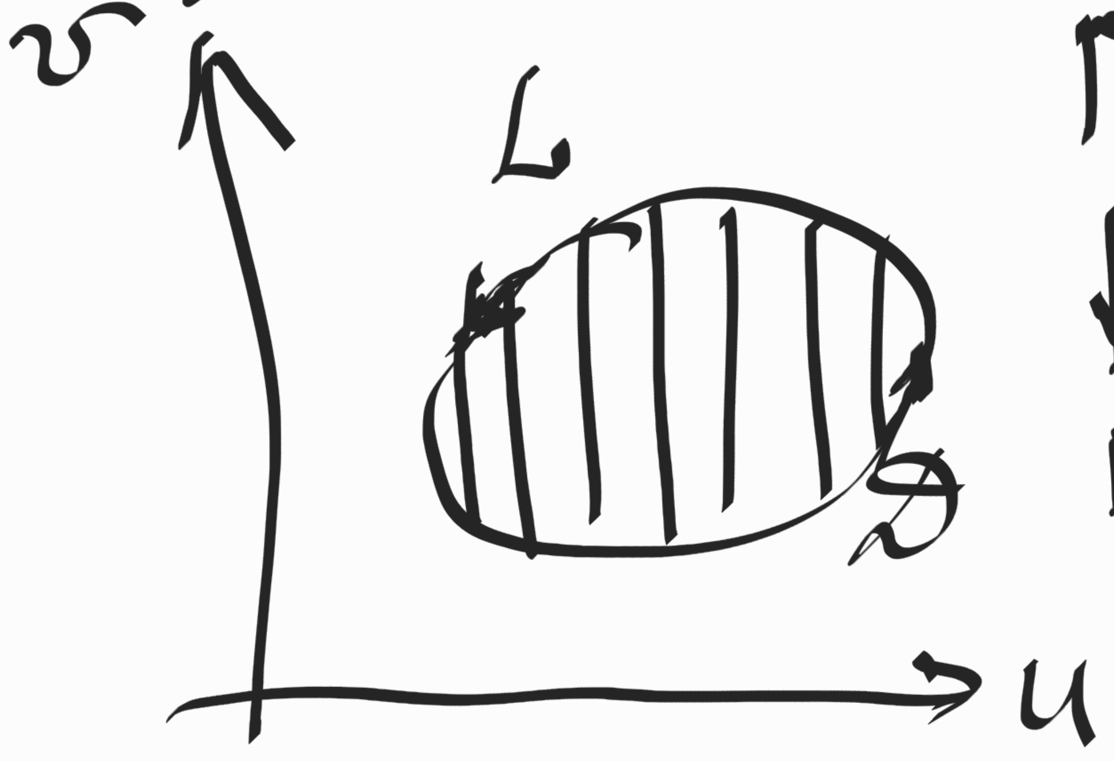
Доказ-во:

$\mathcal{A}$ Θ: $\begin{cases} x = x(u,v), & (u,v) \in \mathcal{D} \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v) \end{cases}$

$\Theta: \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (S)

$\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$

Параметризация согласована с ориентацией S.



$$\begin{array}{ccc} \Gamma & & S \\ \downarrow & & \uparrow \\ L & \longrightarrow & \mathcal{D} \end{array}$$

$$* \oint_{\Gamma} P\,dx = \int_{t_0}^{t_1} P(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t)) \frac{d\tilde{x}}{dt}\,dt$$

$$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (u, v) \in L$$

$$\left.\begin{aligned} z &= z(u(t), v(t)) = \tilde{z}(t) \\ x &= x(u(t), v(t)) = \tilde{x}(t) \\ y &= y(u(t), v(t)) = \tilde{y}(t) \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} P\big(x(u(t),v(t)),\, y(u(t),v(t)),\, z(u(t),v(t))\big)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right)dt =$$

$$= \oint_L \tilde{P}(u,v)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv\right) =$$

$$= \oint_L \left[\tilde{P}(u,v)\frac{\partial x}{\partial u}\right]du + \left[\tilde{P}(u,v)\frac{\partial x}{\partial v}\right]dv =$$

$$\overset{\text{ф-ла}}{\underset{\text{Грина}}{=}} \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\tilde{P}\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\tilde{P}\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right]du\,dv$$

$$= \iint_D \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v} + \right.$$

$$+\cancel{\hat{P}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}}-$$

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u}-$$

$$\left.-\cancel{\hat{P}\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u}}\right]du\,dv=$$

$$=\iint_D\left[\frac{\partial P}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial P}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right]du\,dv$$

$$=\iint_D\left[-\frac{\partial P}{\partial y}\frac{D(x,y)}{D(u,v)}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right]du\,dv$$

$$= \iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial z} dz\,dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx\,dy =$$

$$= \oint\limits_\Gamma P\,dx \qquad (1)^*$$

<u>Аналогично</u>:

$$(2)^*$$

$$\int\limits_\Gamma Q\,dy = \iint\limits_S -\frac{\partial Q}{\partial z} dy\,dz + \frac{\partial Q}{\partial x} dx\,dy,$$

$$\int\limits_\Gamma R\,dz = \iint\limits_S \frac{\partial R}{\partial y} dy\,dz - \frac{\partial R}{\partial x} dz\,dx$$

$$(3)^*$$

Сложим $(1)^*, (2)^*, (3)^*$,

получили ф-лу Стокса.