Лекция 26.10.21 г.

Сведение поверхностного интеграла 2-го рода к двойному интегралу

$\exists$ S - диф-ая

ориентир-ая пов-ть.

1) Зададим ориентацию пов-ти, т.е. зададим напр-е нормали в $\forall$ точке M пов-ти: $\vec{n}_M$.

2) $\forall$ параметризацию пов-ти, согласованную с ориентацией:

$\exists\ \Theta:\ D \to \mathbb{R}^3$
(S)

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v), \end{cases} \quad (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

Параметризация согласована с ориентацией, если:

$\vec{n}_M = \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\Big|_M, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\Big|_M\right]$ сонаправлен с вектором $\vec{N}_M$

$\forall\ (\cdot)\ M;\ \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$

Если параметризация не согласована с ориентацией пов-ти, т.е. $\vec{n}_M \uparrow\downarrow \vec{N}_M$, то нужно изменить порядок ортов и и v.

Если параметризация односвязна с ориентацией пов-ти, то в качестве единичной нормали возьмем

$$\hat{n} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|},$$

Знаем, что:

1) $$\vec{n} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v] =$$

$$= \frac{D(y,z)}{D(u,v)}\hat{i} + \frac{D(z,x)}{D(u,v)}\hat{j} +$$

$$+ \frac{\mathcal{D}(x,y)}{\mathcal{D}(u,v)} k \;;$$

2)

$$\left| [\vec{r}_u, \vec{r}_v] \right| = \sqrt{EG - F^2}\,;$$

3)

$$\iint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint\limits_S \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle\, dS$$

Здесь $\vec{F} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$,

$P = P(x,y,z)$, $Q = Q(x,y,z)$,

$R = R(x,y,z)$.

$$\boxed{=}\iint\limits_D \langle \vec{\tilde F}, \hat n \rangle \underbrace{\sqrt{EG-F^2}}_{|\vec n|}\,du\,dv =$$

$$= \iint\limits_D \langle \vec{\tilde F}, [\vec r_u, \vec r_v] \rangle\,du\,dv =$$

$$= \iint\limits_D \Big[\tilde P \frac{D(y,z)}{D(u,v)} + \tilde Q \frac{D(z,x)}{D(u,v)} +$$

$$+ \tilde R \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \Big]\,du\,dv.$$

<u>Здесь:</u>

$$\tilde P(u,v) = P\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big),$$

$$\tilde Q(u,v) = Q\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big),$$

$$\tilde{R}(u,v) = R(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

<u>Окончательно:</u>

$$\iint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_D \left(\tilde{P}\frac{D(y,z)}{D(u,v)} + \tilde{Q}\frac{D(z,x)}{D(u,v)} + \tilde{R}\frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right) du\,dv$$

Свели пов-ый интеграл 2-го рода к двойному интегралу.

Пример:

$\forall$ S – положит. ориентированная поверхность сферу (характер-ся внешней нормалью):

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

Вычислить интеграл

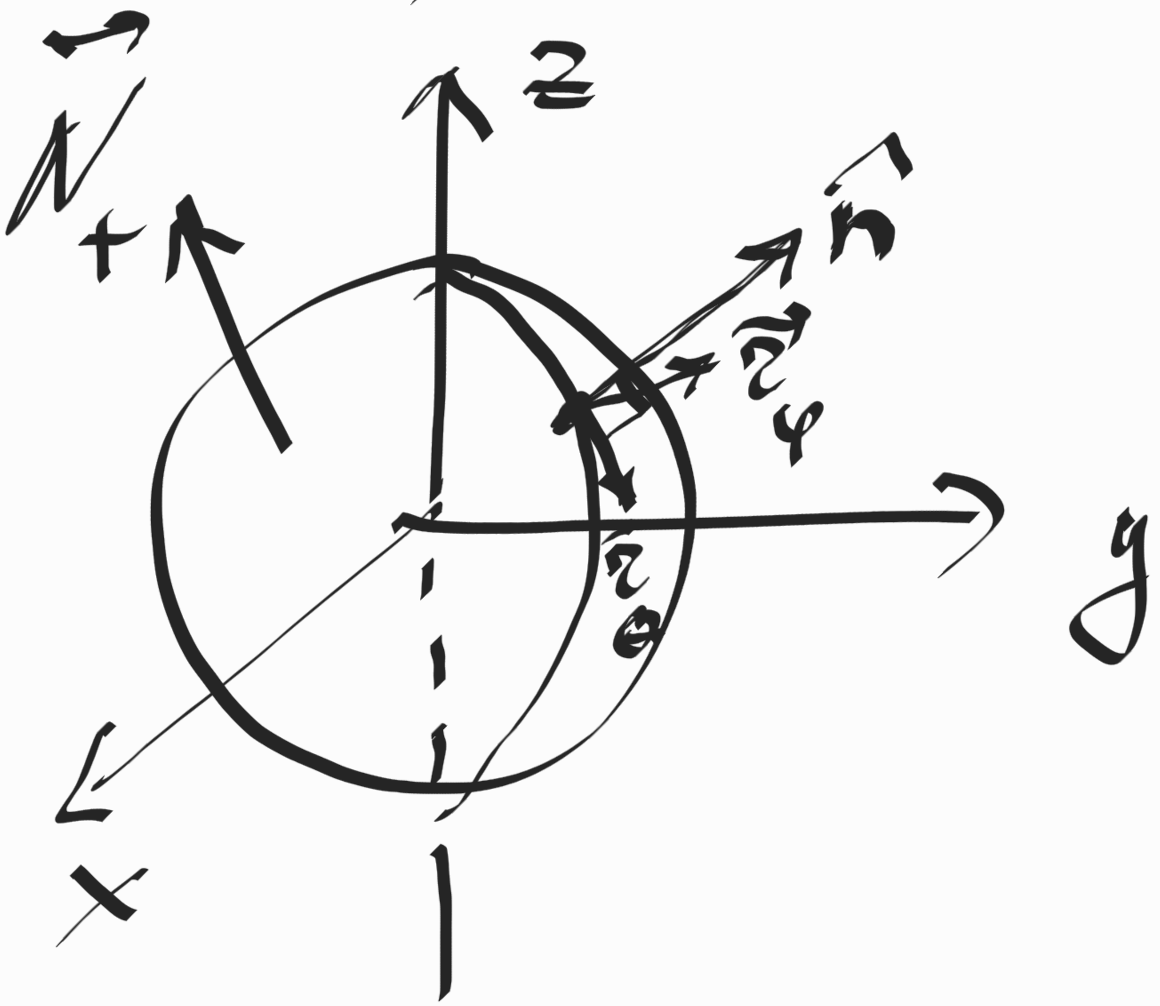
$$\iint\limits_S x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy.$$

Решение:

1) $\forall$ параметризацию пов-ти сферы:

$$\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi, \\ y = R\sin\theta\sin\varphi, \\ z = R\cos\theta, \end{cases}$$

$$\theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$



$$\vec{N}_+ \uparrow\uparrow \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right] = \vec{n}$$

$$\begin{cases} n_x = \dfrac{D(y,z)}{D(\theta,\varphi)} = R^2 \sin^2\theta \cos\varphi, \\[2ex] n_y = \dfrac{D(z,x)}{D(\theta,\varphi)} = R^2 \sin^2\theta \sin\varphi, \\[2ex] n_z = \dfrac{D(x,y)}{D(\theta,\varphi)} = R^2 \cos\theta \sin\theta, \end{cases}$$

$$|\vec{n}| = R^2 \sin\theta.$$

Отыщем единичный вектор нормали:

$$\begin{cases} \hat{n}_x = \sin\theta \cos\varphi, \\ \hat{n}_y = \sin\theta \sin\varphi, \end{cases}$$

$$\left[\hat{n}_z = \cos\theta\right.$$

<u>Погра:</u>

$$\iint\limits_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_D \left(\tilde{P} n_x + \tilde{Q} n_y + \tilde{R} n_z\right) du\,dv$$

$$\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \tilde{P} = \tilde{x} = R\sin\theta\cos\varphi \\ \tilde{Q} = \tilde{y} = R\sin\theta\sin\varphi \end{cases}$$

$$\tilde{R} = \tilde{z} = R\cos\theta$$

$$= R^3 \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\sin^3\theta \cos^2\varphi + \sin^3\theta \sin^2\varphi + \cos^2\theta \sin\theta \right) =$$

$$= R^3 \cdot 2\pi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta = 4\pi R^3 \quad \blacksquare$$

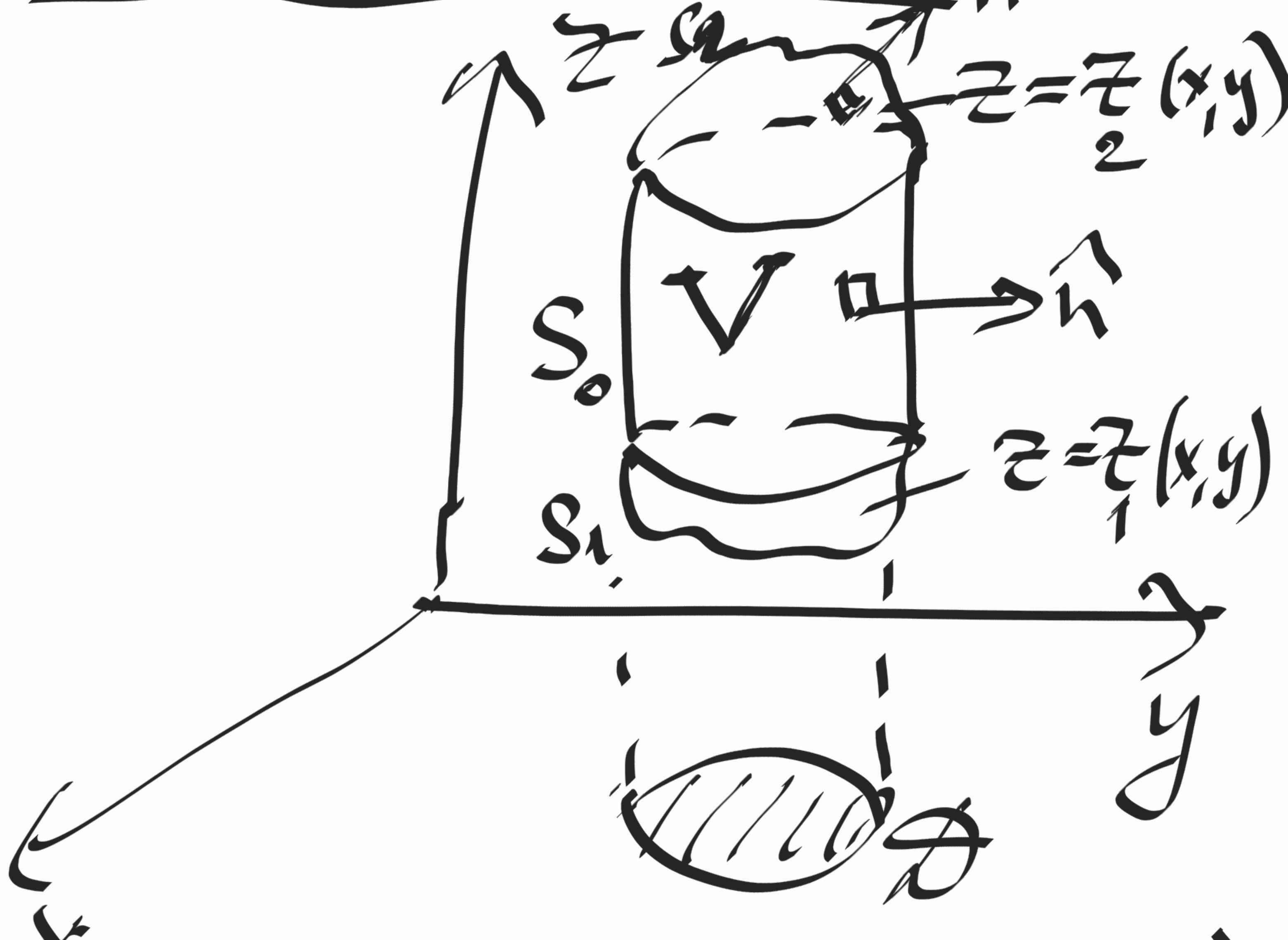
Физический смысл поверхностного интеграла 2-го рода.

J на пов-ти $S \subset \mathbb{R}^3$ определено векторное поля $\vec{F} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$.

Тогда $\iint\limits_S \langle \vec{F}, \hat{n} \rangle \, dS$ – поток векторного поля $\vec{F}$ через пов-ть S в направлении $\hat{n}$.

§ Формула Остроградского-Гаусса.

1) Вычисление объёма с помощью поверхностного интеграла.



(по т. Фубини)

$$V = \iiint\limits_V dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint_D dx\,dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz =$$

$$= \iint_D z_2(x,y)\,dx\,dy - \iint_D z_1(x,y)\,dx\,dy =$$

$$\stackrel{?}{=} \iint_{S_2} z\,dx\,dy + \iint_{S_1} z\,dx\,dy +$$

$$+ \iint_{S_0} z\,dx\,dy = \oiint_{S = \partial V} z\,dx\,dy.$$

Д-во;

$$\ast\ \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \quad \hat{n}_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 \\ \cos\beta_1 \\ \cos\gamma_1 \end{pmatrix}$$

$$\ast \iint_{S_0} z\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{S_0} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 \\ \cos\beta_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) dS = 0,$$

$$\ast \iint_{S_2} z\,dx\,dy = \iint_{D} z_2(x,y) \frac{D(x,y)}{D(x,y)}$$

$$\iint\limits_D dxdy \left[\underbrace{\cancel{0\frac{D(y,z)}{D(x,y)}}}_{=0} + \underbrace{\cancel{0\frac{D(z,x)}{D(x,y)}}}_{=0} + z_2(x,y)\underbrace{\frac{D(x,y)}{D(x,y)}}_{=1} \right]$$

$$= \iint\limits_D dxdy\, z_2(x,y).$$

$$+\iint z\,dxdy = -\iint\limits_D z_1(x,y)\,dxdy$$

S_1

$$[\vec{r}_x, \vec{r}_y] \uparrow\downarrow \vec{N}$$

Для согл-ая ориента-

ции пов-ти и
её параметр-ии
мы меняем порядок
коор-т x и y и
получаем "–" перед
интегралом.

Таким образом,

$$V = \iiint\limits_V dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint\limits_{S=\partial V} z\,dx\,dy \;\blacksquare$$

Рассмотрим сферу (Пример);

$$V_{\text{сферы}} = \oiint\limits_S z\,dx\,dy =$$

$$= \oiint\limits_S y\,dz\,dx = \oiint\limits_S x\,dy\,dz =$$

$$= \frac{1}{3}\oiint\limits_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx +$$

$$+ z\,dx\,dy = \frac{1}{3}\cdot \underbrace{4\pi R^3}_{\text{был вычислен ранее}};$$

Получен объем шара радиуса R;

Аналогично, объем области V (не обязат. сферы) может быть вычислен аналогично:

$$V = \frac{1}{3} \iint_{\partial V} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy;$$