Лекция 24.11.21

Дифференц. формы.

$\nexists$ объекты:

ddx, ddy, ddz.

$$dy = 0 \cdot dx + 1 \cdot dy + 0 \cdot dz$$

$$ddy = \left(\frac{\partial 1}{\partial x} dx + \frac{\partial 1}{\partial y} dy + \frac{\partial 1}{\partial z} dz\right) \wedge dy = 0$$

Т.о. $ddx = ddy = ddz = 0$.

Вернемся к 1-форме

$\alpha = P dx + Q dy + R dz$,

$\exists$ α определена на

области ∂S.

Тогда:

$d\alpha = dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz$

$= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz\right) \wedge dx +$

$+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz\right) \wedge dy +$

$+ \left(\frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz\right) \wedge dz =$

$= dx \wedge dy \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right) +$

$$+ dz \wedge dx \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) +$$

$$+ dy \wedge dz \left(-\frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial y} \right);$$

$$\begin{cases} \vec{F} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}, \\ \underbrace{\int\limits_{\partial S} \langle \vec{F}, \hat{\tau} \rangle \, dl = \iint\limits_{S} \langle \operatorname{rot} \vec{F}, \hat{n} \rangle \, ds}_{\text{ф-ла Стокса}} \end{cases}$$

$$\boxed{\int\limits_{\partial S} \alpha = \int\limits_{S} d\alpha}$$

ф-ла Стокса в терминах дифф. форм.

Ф-ла Остроградского-Гаусса.

$\exists$ β - 2-форма:

$$\beta = A\,dy\wedge dz + B\,dz\wedge dx + C\,dx\wedge dy$$

$$d\beta = dA\wedge dy\wedge dz + dB\wedge dz\wedge dx + dC\wedge dx\wedge dy =$$

$$= \frac{\partial A}{\partial x}\,dx\wedge dy\wedge dz + \frac{\partial B}{\partial y}(-1)^2\,dx\wedge dy\wedge dz + \frac{\partial C}{\partial z}(-1)^2\,dx\wedge dy\wedge dz =$$

$$= \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz$$

$$\overset{?}{=} \operatorname{div} \vec{F},$$

где $\vec{F} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$.

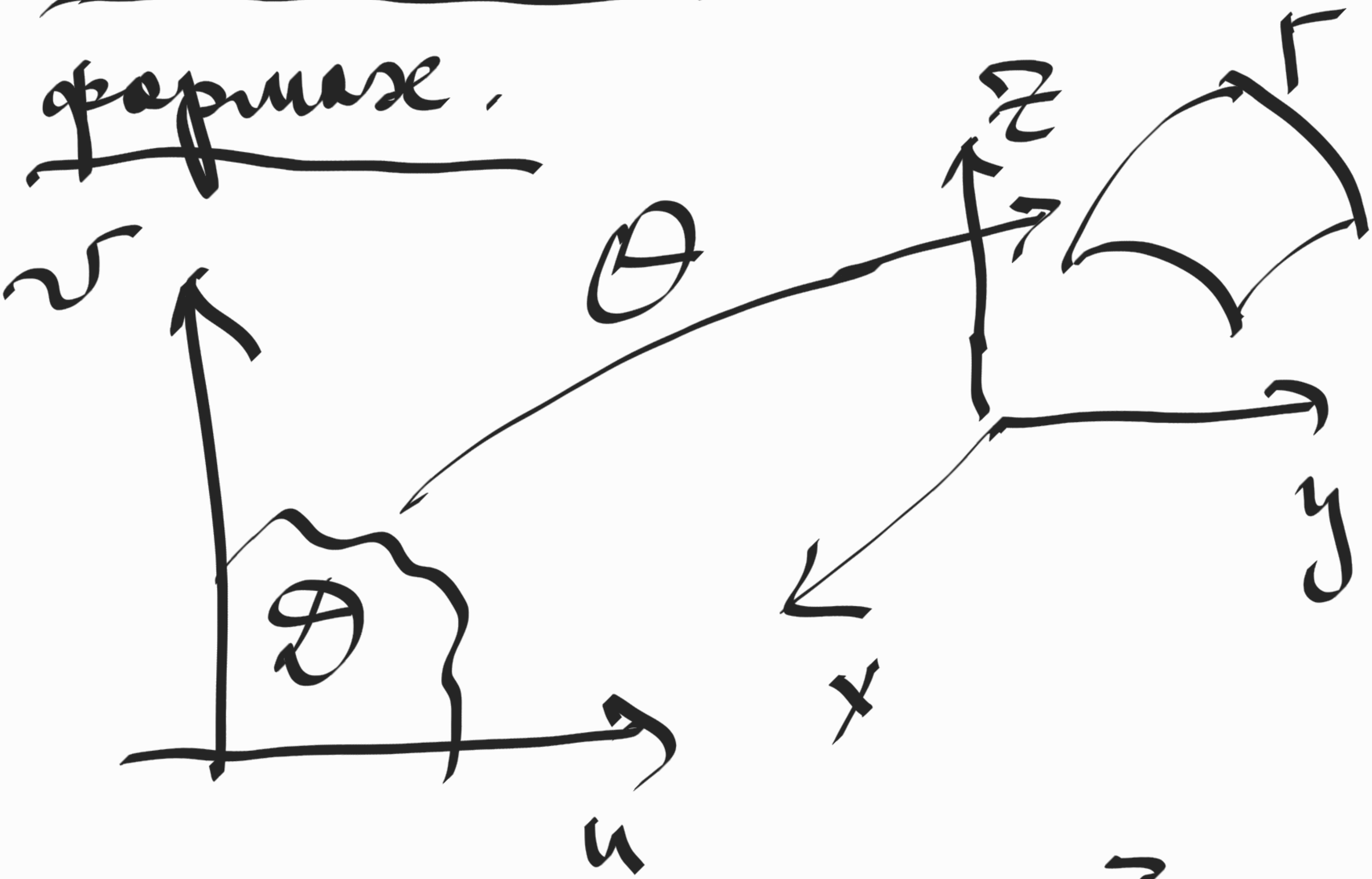
$\exists$ 2-форма β определена на <u>замкнутой</u> пов-ти ∂V.

Тогда

$$\boxed{\int_{\partial V} \beta = \int_{V} d\beta} \text{ —}$$

ф-ла Остроградского–Гаусса

§ Замена переменных в формах.



$$\Theta : D \to \Gamma \subset \mathbb{R}^3$$

$$\Theta : \begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v). \end{cases}$$

∃ форма ω задана в

окрестности Γ,

$\theta^{*}\omega$ – сужение формы ω на обл-ть D.

1)

<u>$\forall$ сужение на D</u>

<u>0-формы (функции $f(x,y,z)$)</u>

$$\theta^{*}f(u,v)=f\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)$$

<u>$\forall$ сужение на D</u>

<u>1-формы α</u>,

$$\alpha=P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

$$\theta^*\alpha(u,v) = \theta^* P \cdot \theta^* dx + \theta^* Q \cdot \theta^* dy + \theta^* R \cdot \theta^* dz =$$

$$= \tilde{P}(u,v)\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) + \tilde{Q}(u,v)\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right) + \tilde{R}(u,v)\left(\frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv\right),$$

где $\tilde{P}(u,v) \equiv P(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$.

$\forall$ сужение на D

2-формы β, где

$$\beta = A\,dy\wedge dz + B\,dz\wedge dx + C\,dx\wedge dy.$$

$$\theta^*\beta = \theta^*A\,(\theta^* dy)\wedge(\theta^* dz) +$$

$$+\,\theta^*B\,(\theta^* dz)\wedge(\theta^* dx) +$$

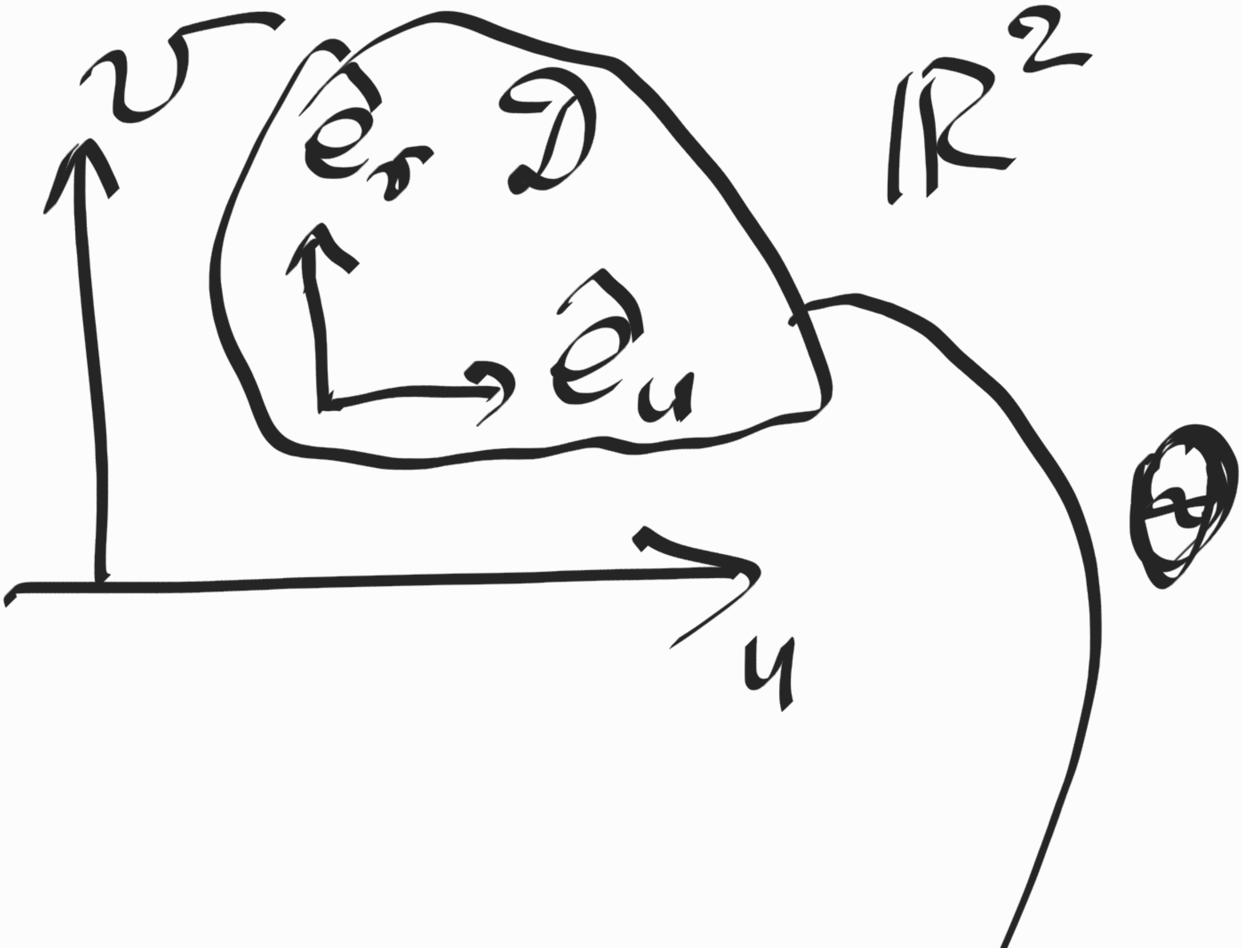
$$+\,\theta^*C\,(\theta^* dx)\wedge(\theta^* dy) =$$

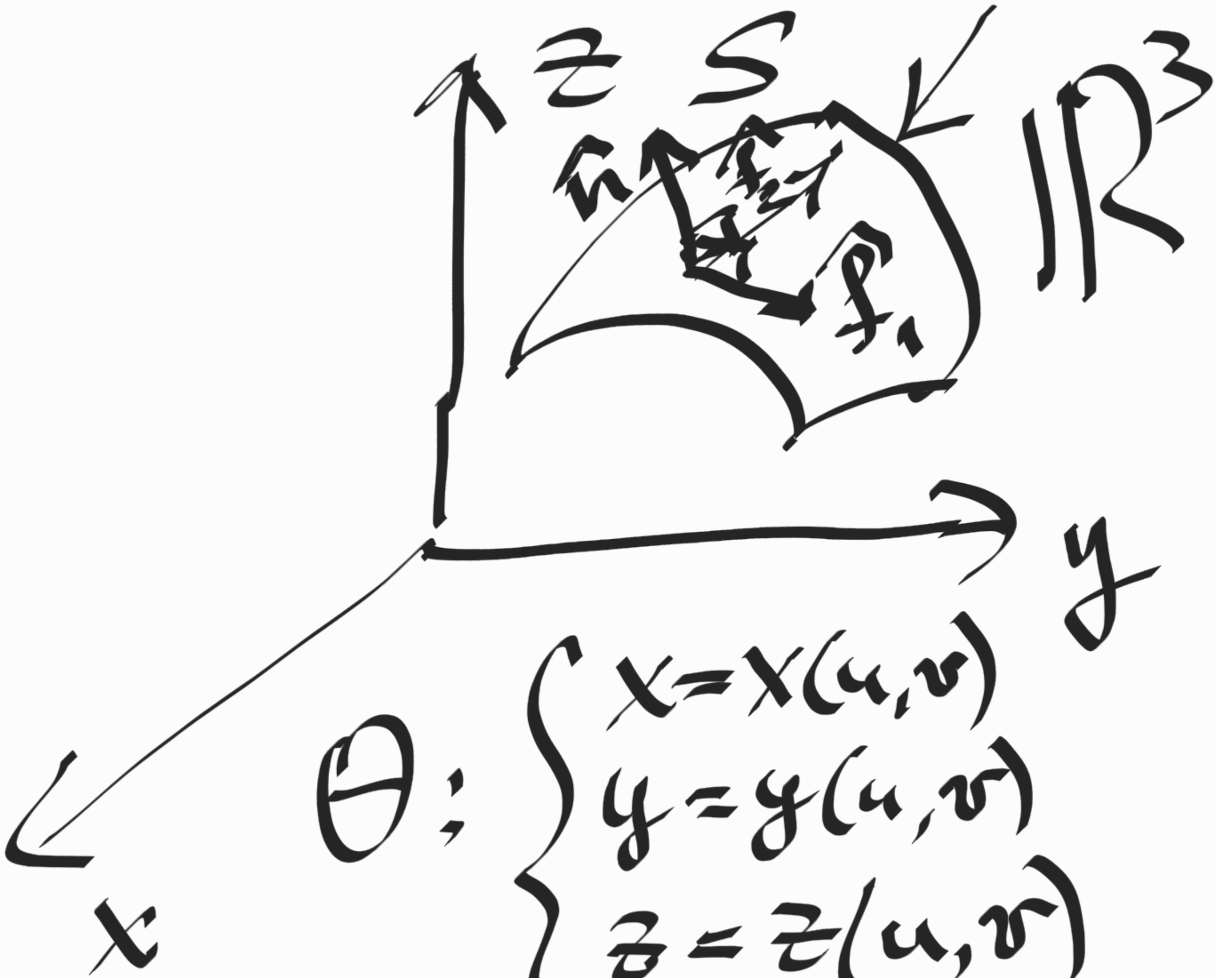
$$\left\{\begin{aligned}
&(\theta^* dy)\wedge(\theta^* dz) = \\
&= \left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right)\wedge\left(\frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv\right) = \\
&= \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} du\wedge dv = \\
&= \frac{D(y,z)}{D(u,v)}\,du\wedge dv
\end{aligned}\right.$$

$$\ominus \left[\tilde{A}(u,v)\frac{D(y,z)}{D(u,v)} + \tilde{B}(u,v)\frac{D(z,x)}{D(u,v)} + \right.$$

$$\left. + \tilde{C}(u,v)\frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right] du \wedge dv$$

§ Ориентированные пространства.





$$\Theta: \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

$\exists\ T$ – отображение базиса $(\hat{e}_u, \hat{e}_v) \to$

$\to (\hat{f}_1, \hat{f}_2)$;

$\det T \neq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \det T > 0 \\ \det T < 0 \end{array}\right.$$

Если есть выделенное напр-е в пр-ве то можно определить левый или правый базис. Если выделенного напр-я нет, то базисы равноправны.

* Интеграл по пов-ти S, определенной выше.

$$J = \iint\limits_S A\,dy\wedge dz + B\,dz\wedge dx +$$

$$+ C\,dx\wedge dy =$$

$\left\{ \begin{array}{l} S\text{ - ориентированная} \\ \text{пов-ть} \end{array} \right.$

$$= \iint\limits_D \left[\overset{*}{\theta} A \frac{D(y,z)}{D(u,v)} + \overset{*}{\theta} B \frac{D(z,x)}{D(u,v)} + \right.$$

$$\left. + \overset{*}{\theta} C \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right] du\wedge dv \quad (*)$$

Порядок ортов $(\hat{e}_u, \hat{e}_v)$ в базисе на D определячто направление нормали $\hat{n}$ в произв. (·) пов-ти S:

$$\left[\vec{\Theta}_u \times \vec{\Theta}_v\right] = \vec{n},$$

где $\vec{\Theta}_u = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix}$, $\vec{\Theta}_v = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$,

Если ориентация пов-ти S, определяемая нормалью $\vec{N}$, совпадает

с ориентацией $\vec{n}=[\vec{\Theta}_u\times\vec{\Theta}_v]$,

то интеграл (*):

$$J=\iint\limits_{D}\Big[\tilde{A}(u,v)\,\underline{\frac{D(y,z)}{D(u,v)}}+$$

$$+\tilde{B}(u,v)\,\underline{\frac{D(z,x)}{D(u,v)}}+\tilde{C}(u,v)\,\underline{\frac{D(x,y)}{D(u,v)}}\Big]du\,dv$$

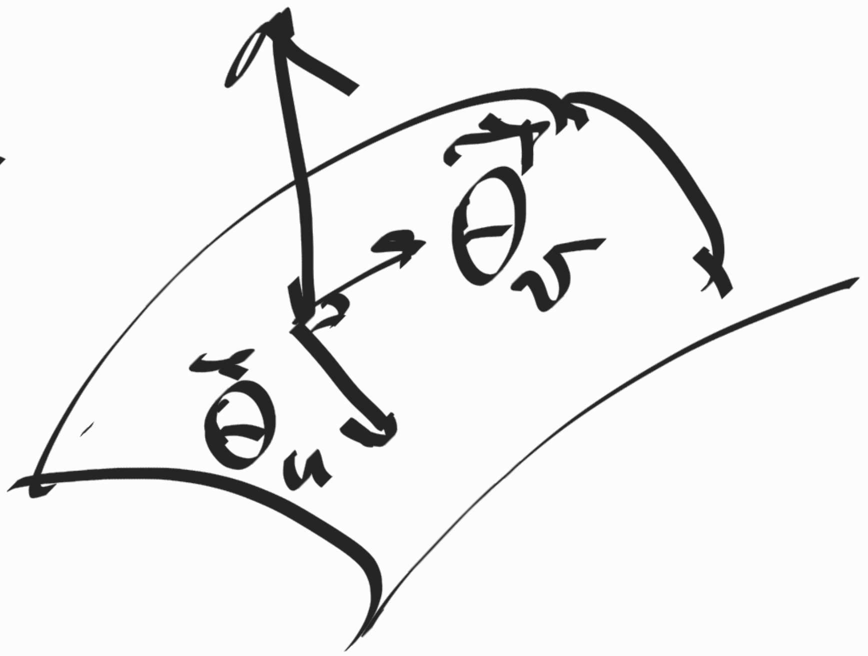
(знак внешнего умножения сохраняется).

Если же $[\vec{\Theta}_u\times\vec{\Theta}_v]\uparrow\downarrow\vec{N}$

что порядок ортов в базисе $(\hat{e}_u, \hat{e}_v)$ должен быть изменен.

Это меняет знак интеграла (*) на противоположный.

$du \wedge dv$



$$[d\vec{\Theta}_u \times d\vec{\Theta}_v] = [\vec{\Theta}_u \times \vec{\Theta}_v]\, du\, dv$$

§ Дифференциальные уравнения.

$$* \quad \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n)})$$

$$(*)$$

n - порядок уравнения

Φ - известная функция

Если y - решение уравнения (*), то это уравнение превр-ся в тождество. (спр-во для $\forall x$ из обл-ти определения).

<u>Линейное однородное дифференц. ур-е n-го порядка.</u>

Утверждение: решения ЛОДУ n-го порядка образуют линейное простр-во.

<u>Д-во</u>: $\exists$ y - решение ЛОДУ

Надо проверить, что Cy (где C - постоянная) - тоже решения.

Мы знаем, что y - решение ЛОДУ:

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+$$

$$+a_n(x)y=0 \qquad (**)$$

Здесь $a_i(x)$ - вещественнозначные функции

$i = 1, 2, \ldots, n$.

$$\cancel{\mathcal{F}}$$

$$(Cy)^{(n)} + a_1(x)(Cy)^{(n-1)} + \ldots$$

$$+ a_{n-1}(x)(Cy)' + a_n(x)\,Cy =$$

$$= C\underbrace{\left\{y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n y\right\}}_{\text{“}0}=0$$

Аналогично:

$\exists\ y_1, y_2$ — решения ур-я $(**)$,

то $(y_1 + y_2)$ — тоже решение.

Вывод: любая линейная комбинация решений образует решение ∎

Пример 1.

$$y' + a(x)y = 0$$

Решение:

1) $y \equiv 0$ – решение

2) $\exists\ y \neq 0 \Rightarrow \dfrac{y'}{y} = -a(x)$

$$\ln|y| = -\int a(x)dx + \ln|C|,$$

$$C \neq 0$$

$$y(x) = C e^{-\int a(x)dx}$$

<u>Пример 2.</u>

$$y^{(n)} = 0$$

<u>Решение</u>: $y^{(n-1)} = C_1$

$$y^{(n-2)} = C_1 x + C_2$$

$$y(x) = C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots$$

$$+ C_n .$$

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами.

$*$ ур-е: (1)

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

Л.О.Д.У. с постоянными коэф-ми — ур-е вида (1), где a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ — постоянные.

Пример:

$$y' + a_1 y = 0$$

$$\frac{dy}{y} = -a_1 dx$$

$$\ln|y| = -\int a_1 dx + \ln|C|$$

$$y(x) = Ce^{-\int a_1 dx} = Ce^{-a_1 x}$$

<u>Пример</u>:

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (*)$$

Ищем решение в виде

$$y = e^{\lambda x}:$$

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + qe^{\lambda x} =$$

$$= (\lambda^2 + p\lambda + q)e^{\lambda x} = 0$$

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \qquad (2)$$

$\lambda=\lambda_1$, $\lambda=\lambda_2$ – корни характеристического ур-я (2).

$$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$$ –

общее решение ур-я (*), если $\lambda_1\neq\lambda_2$.

$\exists\ \lambda_1\neq\lambda_2$, $\lambda_1-\lambda_2\to 0$

$$* \quad y=\frac{e^{\lambda_1 x}-e^{\lambda_2 x}}{\lambda_1-\lambda_2}$$