Лекция 23.11.21

Уравнение Лапласа в сферических координатах:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+$$

$$+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0 \qquad (*)$$

Найдем решения этого ур-я, зависящие только от r.

При этом:

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0 .$$

Т.о. из ур-я (*):

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad r^2 \frac{\partial u}{\partial r} = -C_1$$

или же: $\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{C_1}{r^2}$.

$u = \frac{C_1}{r} + C_2$, где

C_1 и C_2 – произв. постоянные

В частности при $C_1 = 1$, $C_2 = 0$

$$u(r) = \frac{1}{r} ;$$

Цилиндрические координаты:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

В наших обозначениях:

$$q_1 = \rho, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z$$

Для ds^2 имеем:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 =$$

$= d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2.$

Отсюда следует, что коэф-ы Ламе:

$H_1 = 1, \quad H_2 = \rho, \quad H_3 = 1.$

Тогда уравнение Лапласа в цилиндрич. координатах:

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi}\right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho \frac{\partial U}{\partial z}\right) = 0$$

Или же:

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right)+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right)+$$

$$+\rho \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \qquad (**)$$

Будем искать решения, зависящие только от ρ,

$u=u(\rho)$; Из $(**)$:

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right)=0$$

$$\Rightarrow \rho \frac{\partial u}{\partial \rho}=C_1$$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{C_1}{\rho}$$

$$\Rightarrow u(\rho) = C_1 \ln \rho + C_2$$

Дифференциальные формы.

§1. Внешние формы

Пусть V — произвольное n-мерное веществ. векторное пр-во.

Без потери общности будем считать, что
$V = \mathbb{R}^n$.

<u>def</u> Внешней k-формой называется полилинейная кососимметрическая вещественная функция k векторов. Число k называется степенью формы.

Если ω — внешняя k-форма, то её значения на векторах $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$

обозначается через

$\omega(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k)$.

При этом степень формы обозначается $\deg \omega$ $(=k)$.

<u>Полилинейность ω</u> означает её линейность по $\forall$ аргументу.

<u>Кососимметричность ω</u> (или её антисимметричность) означает, что ω равна нулю, когда два

её аргумента совпадают:

$$\omega(\ldots \vec{a}, \ldots \vec{a} \ldots) = 0 .$$

В виду полилинейности это эквивалентно св-ву:

$$\omega(\ldots \bar{a} \ldots \bar{b} \ldots) = -\omega(\ldots \bar{b} \ldots \bar{a} \ldots)$$

<u>Д-во</u>:

$$\forall\ \omega(\ldots \bar{a}+\bar{b} \ldots \vec{a}+\vec{b} \ldots) =$$

$$= 0 = \cancel{\omega(\ldots a \ldots a \ldots)} +$$

$$+\omega(\dots\bar{a}\dots\bar{b}\dots)+\omega(\dots\bar{b}\dots\bar{a}\dots)+$$

$$+\cancel{\omega(\dots\bar{b}\dots\bar{b}\dots)};$$

$$\Rightarrow \omega(\dots\bar{a}\dots\bar{b}\dots)=$$

$$=-\omega(\dots\bar{b}\dots\bar{a}\dots) \quad \blacksquare$$

__def__ ⌉ теперь V — n-мерное вещественное пр-во ($\mathbb{R}^n$). Дифференциальной k-формой называется полилинейная кососимметрическая функция k векторных полей с областью значений во множестве веществ. ф-ий.

Число k называется степенью формы.

$\exists$ пр-во $\mathbb{R}^3$

] x, y, z - координаты в $\mathbb{R}^3$.

1) $f(x,y,z)$ – "0"-форма

2) $\forall$ 1-формы

$$\alpha = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz \; ;$$

Операции с формами

Внутреннее произведение форм на вектор $i_{\vec{a}}\alpha$

$$\exists \; \vec{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

1-форма dx действует на вектор $\vec{h}$:

$$dx(\vec{h}) = h_1,$$

$$dy(\vec{h}) = h_2,$$

$$dz(\vec{h}) = h_3.$$

$$i_{\vec{h}} dx \overset{def}{=} dx(\vec{h}) = h_1$$

$$i_{\vec{h}} \alpha = \alpha(\vec{h}) =$$

$$= P(x,y,z)h_1 + Q(x,y,z)h_2 +$$

$$+ R(x,y,z)h_3 \quad ;$$

Возникла 0-форма,

т.е. внутреннее умн-е формы на вектор понижает её порядок

Рассмотрим 2-формы:

$\omega = A(x,y,z)\,dy\wedge dz + B(x,y,z)\,dz\wedge dx + C(x,y,z)\,dx\wedge dy$.

2-формы определены на паре векторов

Рассмотрим действие формы ω на паре векторов $(\vec{h}, \vec{k})$.

$$dy \wedge dz(\vec{h}, \vec{k}) \overset{def}{=} \begin{vmatrix} h_2 & k_2 \\ h_3 & k_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} dy(\vec{h}) & dy(\vec{k}) \\ dz(\vec{h}) & dz(\vec{k}) \end{vmatrix} =$$

$$= -dz \wedge dy(\vec{h}, \vec{k}) =$$

$$= -dy \wedge dz(\vec{k}, \vec{h}).$$

$$dz \wedge dx(\vec{h}, \vec{k}) \overset{def}{=} \begin{vmatrix} h_3 & k_3 \\ h_1 & k_1 \end{vmatrix}$$

$$dx \wedge dy(\vec{h}, \vec{k}) \overset{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} h_1 & k_1 \\ h_2 & k_2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\, dy \wedge dx(\vec{h}, \vec{k}).$$

Рассмотрим внутреннее умн-е 2-формы β на вектор $\vec{h}$:

$$\underline{i_{\vec{h}}\, \beta = ?}$$

Мы знаем, что

$$i_{\vec{h}}\beta(\vec{k}) \stackrel{def}{=} \beta(\vec{h},\vec{k})$$

T.o.

$$i_{\vec{h}}(dy\wedge dz)(\vec{k}) = dy\wedge dz(\vec{h},\vec{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} h_2 & k_2 \\ h_3 & k_3 \end{vmatrix} = h_2 k_3 - k_2 h_3 =$$

$$= h_2 dz(\vec{k}) - h_3 dy(\vec{k}) =$$

$$= (h_2 dz - h_3 dy)(\vec{k}).$$

П.О.

$$i_{\vec{h}}(dy \wedge dz) = dy(\vec{h})\,dz - dz(\vec{h})\,dy.$$

Возникла 1-форма.

Аналогично:

$$i_{\vec{h}}(dz \wedge dx) = dz(\vec{h})\,dx - dx(\vec{h})\,dz.$$

$$i_{\vec{h}}(dx \wedge dx) = 0 \quad \forall \vec{h}$$

$dx \wedge dx = 0.$

$$dx \wedge dx(\vec{h}, \vec{k}) = \begin{vmatrix} h_1 & k_1 \\ h_1 & k_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Рассмотрим 3-формы

Т: $\omega = f(x, y, z)\, dx \wedge dy \wedge dz$ -

- 3 форма.

3-формы определены на тройках векторов.

А именно,

$$\omega(\vec{h}, \vec{k}, \vec{l}) = f(x,y,z) \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} h_1 & k_1 & l_1 \\ h_2 & k_2 & l_2 \\ h_3 & k_3 & l_3 \end{vmatrix} =$$

$$= f(x,y,z) \begin{vmatrix} dx(\vec{h}) & dx(\vec{k}) & dx(\vec{l}) \\ dy(\vec{h}) & dy(\vec{k}) & dy(\vec{l}) \\ dz(\vec{h}) & dz(\vec{k}) & dz(\vec{l}) \end{vmatrix} \ldots \quad (1)$$

$$\measuredangle \quad i_{\vec{h}}\,\omega = ?$$

(2-форма).

$$i_{\vec{h}}(dx\wedge dy\wedge dz)(\vec{k},\vec{e}) \overset{def}{=}$$

$$\overset{def}{=} dx\wedge dy\wedge dz(\vec{h},\vec{k},\vec{e}),$$

разл-е опред-ля в (1) по 1-му столбцу:

$$i_{\vec{h}}(dx\wedge dy\wedge dz) = h_1\, dy\wedge dz$$

$$- h_2\, dx\wedge dz + h_3\, dx\wedge dy =$$

$$= dx(\vec{h})\, dy\wedge dz +$$

$$+ dy(\vec{h})\, dz\wedge dx +$$

$+ dz(\vec{h})\, dx \wedge dy.$

Возникла 2-форма.

$\exists$ α и β — 1-формы.

$\alpha \wedge \beta$ — линейная кососимметричная 2-форма.

$\exists$ $\alpha \equiv P dx + Q dy + R dz,$

$\beta \equiv A dx + B dy + C dz,$

Здесь A, B, C, P, Q, R

- функции (x, y, z).

<u>Рассмотрим</u>:

$$(P\,dx + Q\,dy + R\,dz) \wedge (A\,dx + B\,dy + C\,dz) =$$

$$= \begin{vmatrix} dy \wedge dz & dz \wedge dx & dx \wedge dy \\ P & Q & R \\ A & B & C \end{vmatrix} \quad (2)$$

$$\text{л. ч.} = \cancel{P\,dx \wedge dx} + \underline{PB\,dx \wedge dy} +$$

$$+ \underline{PC\,dx \wedge dz} + \underline{QA\,dy \wedge dx} +$$

$$+ \cancel{QB\,dy \wedge dy} + \underline{QC\,dy \wedge dz} +$$

$$+\underline{\underline{RA\,dz\wedge dx}}+\underline{RB\,dz\wedge dy}+$$

$$\cancel{+RC\,dz\wedge dz}=$$

$$=dy\wedge dz\,(QC-RB)+$$

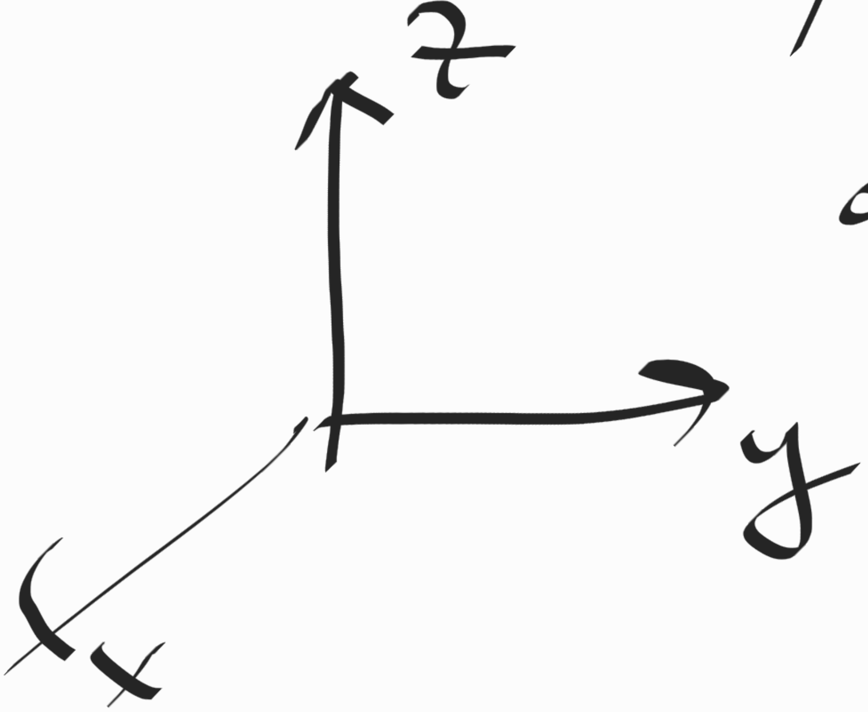
$$+dz\wedge dx\,(RA-PC)+$$

$$+dx\wedge dy\,(PB-AQ),$$

Уравнение (2) эквивалентно векторному произведению векторов

$$\begin{pmatrix}P\\Q\\R\end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}$$ с ортами

$dy \wedge dz \sim \hat{i}$, $dz \wedge dx \sim \hat{j}$,



$dx \wedge dy \sim \hat{k}$;

J теперь α – 2-форма

β – 1-форма

Тогда $\alpha \wedge \beta$ – 3-форма;

$$\alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha \qquad (3)$$

$\exists\ \alpha, \beta, \gamma$ — 1-формы

$\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$ — 3-форма

$$(\alpha \wedge \beta \wedge \gamma)(\bar{h}, \bar{k}, \bar{e}) \overset{def}{=} \begin{vmatrix} \alpha(\bar{h}) & \alpha(\bar{k}) & \alpha(\bar{e}) \\ \beta(\bar{h}) & \beta(\bar{k}) & \beta(\bar{e}) \\ \gamma(\bar{h}) & \gamma(\bar{k}) & \gamma(\bar{e}) \end{vmatrix}$$

$$\underbrace{(\alpha \wedge \beta)}_{\text{2-форма}} \wedge \gamma \overset{def}{=} \alpha \wedge \beta \wedge \gamma.$$

<u>Дифференциальные формы</u>:

$\omega \quad \rightarrow \quad d\omega$

---

1) $\exists\ f(x,y,z)$ – 0-форма

df – обычный диф-л, т.е.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

---

2) $\exists\ \alpha$ – 1-форма

$$\alpha = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

$$d\alpha \overset{def}{=} dP\wedge dx + dQ\wedge dy + dR\wedge dz =$$

$\{dy\wedge dz,\ dz\wedge dx,\ dx\wedge dy\}$ – возможные 2-формы

$$= \tilde{A}\, dy\wedge dz + \tilde{B}\, dz\wedge dx +$$
$$+ \tilde{C}\, dx\wedge dy$$

3) $\exists$ β - 2 форма

$$\beta = A\, dy\wedge dz + B\, dz\wedge dx + C\, dx\wedge dy$$

$$d\beta = dA\wedge dy\wedge dz + dB\wedge dz\wedge dx +$$
$$+ dC\wedge dx\wedge dy =$$
$$= \tilde{G}\, dx\wedge dy\wedge dz \quad ;$$