Лекция 17.11.21

Выражение оператора Лапласа в ортогональных координатах. Коэффициенты Ламе.

Мы собираемся рассм-ть также с-мы координат, в которых элемент. объем выр-ся в виде прямоуг. параллелепипеда.

$\forall \ \mathbb{R}^3$

$(x, y, z) \to (q_1, q_2, q_3)$

А именно,

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \varphi(x, y, z) \\ q_2 &= \psi(x, y, z) \\ q_3 &= \omega(x, y, z) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

или в обратной форме

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi_1(q_1, q_2, q_3) \\ y &= \psi_1(q_1, q_2, q_3) \\ z &= \omega_1(q_1, q_2, q_3) \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

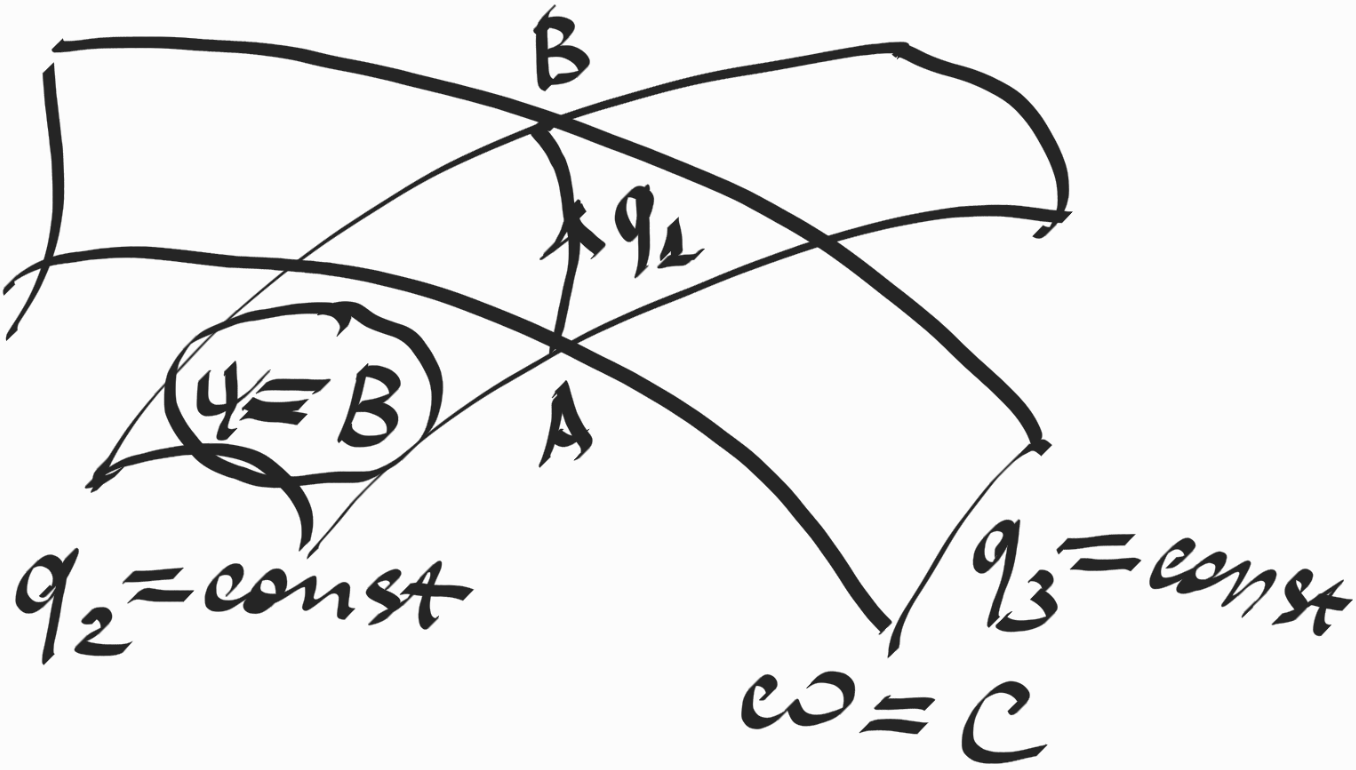
Зададим три семейства координатных поверхностей:

$$q_1 = A, \quad q_2 = B, \quad q_3 = C$$

или же:

$$\begin{cases} \varphi(x,y,z) = A & (\mathrm{I}) \\ \psi(x,y,z) = B & (\mathrm{II}) \\ \omega(x,y,z) = C & (\mathrm{III}) \end{cases} \quad (3)$$

Возьмем две коорд-ые поверхности из семейств (II) и (III).



Вдоль линии (AB) меняется только переменная q_1. Т.о. линия (AB) называется координатной линией q_1.

Аналогичным образом получим координатные линии q_2 и q_3.

Вычислим ds^2 в новых коорд-ах (квадрат элемента длины):

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_3} dq_3\right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \psi_1}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \psi_1}{\partial q_3} dq_3\right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \omega_1}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \omega_1}{\partial q_3} dq_3\right)^2 . \quad (4)$$

Получим однородный полином второй степени

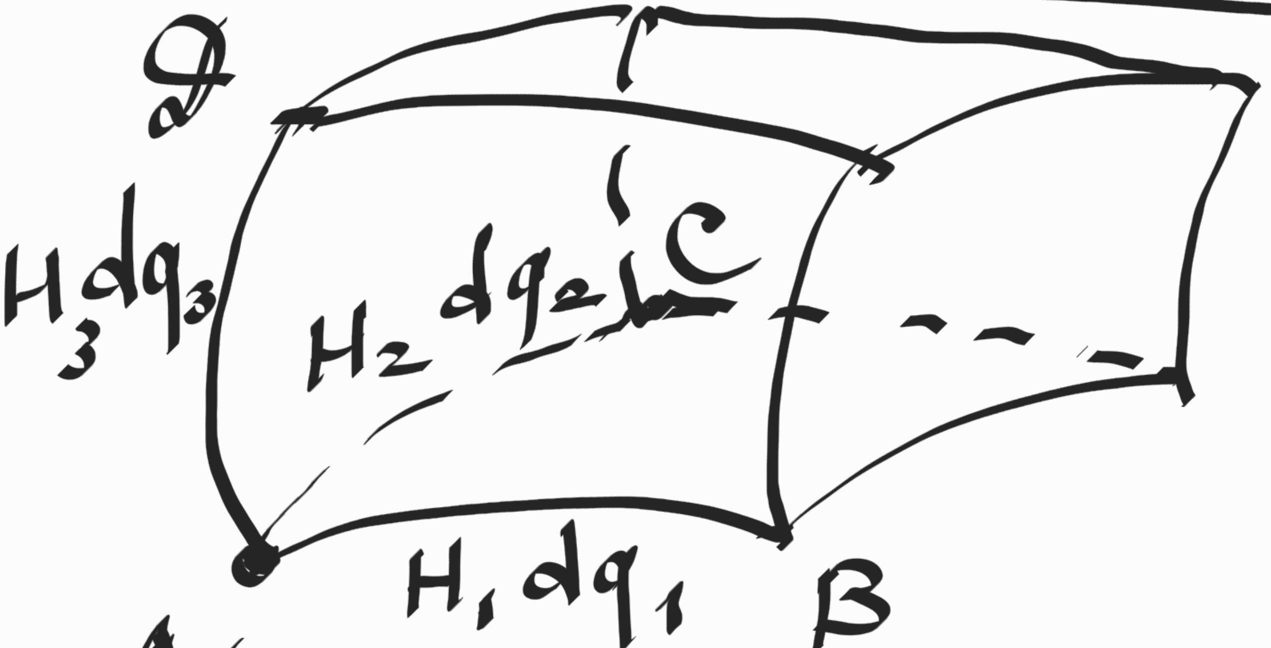
относительно dq_1, dq_2, dq_3.
Рассмотрим в выражении (4) слагаемое, содержащее $dq_1 dq_2$ (выясняем условия, при которых коэф-ы при смешанных произведениях диф-ов обр-ся в ноль).

Коэф-т при $dq_1 dq_2$ в ур-ии (4):

$$2\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}+\frac{\partial\psi_1}{\partial q_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial q_2}+\frac{\partial\omega_1}{\partial q_1}\frac{\partial\omega_1}{\partial q_2}\right) \quad (5)$$

~~Х~~ элемент объема

(в переменных q_1, q_2, q_3)



$A(q_1, q_2, q_3)$

Вдоль ребра (AB) меняется только q_1, вдоль ребра (AC) меняется только q_2, вдоль ребра (AD) меняется лишь q_3.

Поскольку на ребре (AB) меняется лишь q_1, тогда касательный вектор к ребру (AB):

$$\vec{\tau}_{(AB)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial q_1} \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial q_1} \end{pmatrix}.$$

Аналогично касат. вектор ко второму ребру (AC):

$$\vec{\tau}_{(AC)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_2} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial q_2} \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

$$\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial q_2} \right)$$

Т.о. обращение в ноль ур-я (5) аналогично требованию перпендикулярности ребер (AB) и (AC):

$$\langle \vec{\tau}_{(AB)}, \vec{\tau}_{(AC)} \rangle = 0.$$

Если потребовать, чтобы в (4) обр-сь в ноль и коэф-ы при $dq_1 dq_3$ и $dq_2 dq_3$, то это будет равносильно условиям:

$$\left.\begin{aligned}
&\langle \bar{\tau}_{(AB)}, \bar{\tau}_{(AC)} \rangle = 0, \\
&\langle \bar{\tau}_{(AB)}, \bar{\tau}_{(AD)} \rangle = 0, \\
&\langle \bar{\tau}_{(AC)}, \bar{\tau}_{(AD)} \rangle = 0
\end{aligned}\right\}$$

(ортогональность всех трех ребер).

Т.о., необходимым и достаточным условием ортогональности системы криволинейных координат является условие содержания выражением ds^2 только

членов с квадратами дифференциалов:
dq_1^2, dq_2^2, dq_3^2.
Будем в дальнейшем считать, что введенные криволинейные координаты ортогональны.

Тогда:

$$ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2 \qquad (6)$$

Здесь:

$$H_1^2 = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial q_1}\right)^2,$$

$$
\left.\begin{aligned}
H_2^2 &= \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial q_2}\right)^2, \\
H_3^2 &= \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial q_3}\right)^2
\end{aligned}\right\} \tag{7'}
$$

Уравнение (7) дает явные выражения для коэф-ов Ламе.

Т.о. длины ребер элементарного объема ((AB), (AC), (AD)) имеют вид:

$$ds_1 = H_1\, dq_1, \quad ds_2 = H_2\, dq_2,$$
$$ds_3 = H_3\, dq_3 \qquad (8)$$

Тогда запишем элемент объема в новых координатах:

$$dV = ds_1 ds_2 ds_3 = \qquad (9)$$
$$= H_1 H_2 H_3\, dq_1\, dq_2\, dq_3 .$$

Предположим, что в пространстве имеется векторное поле $\vec{A}$.

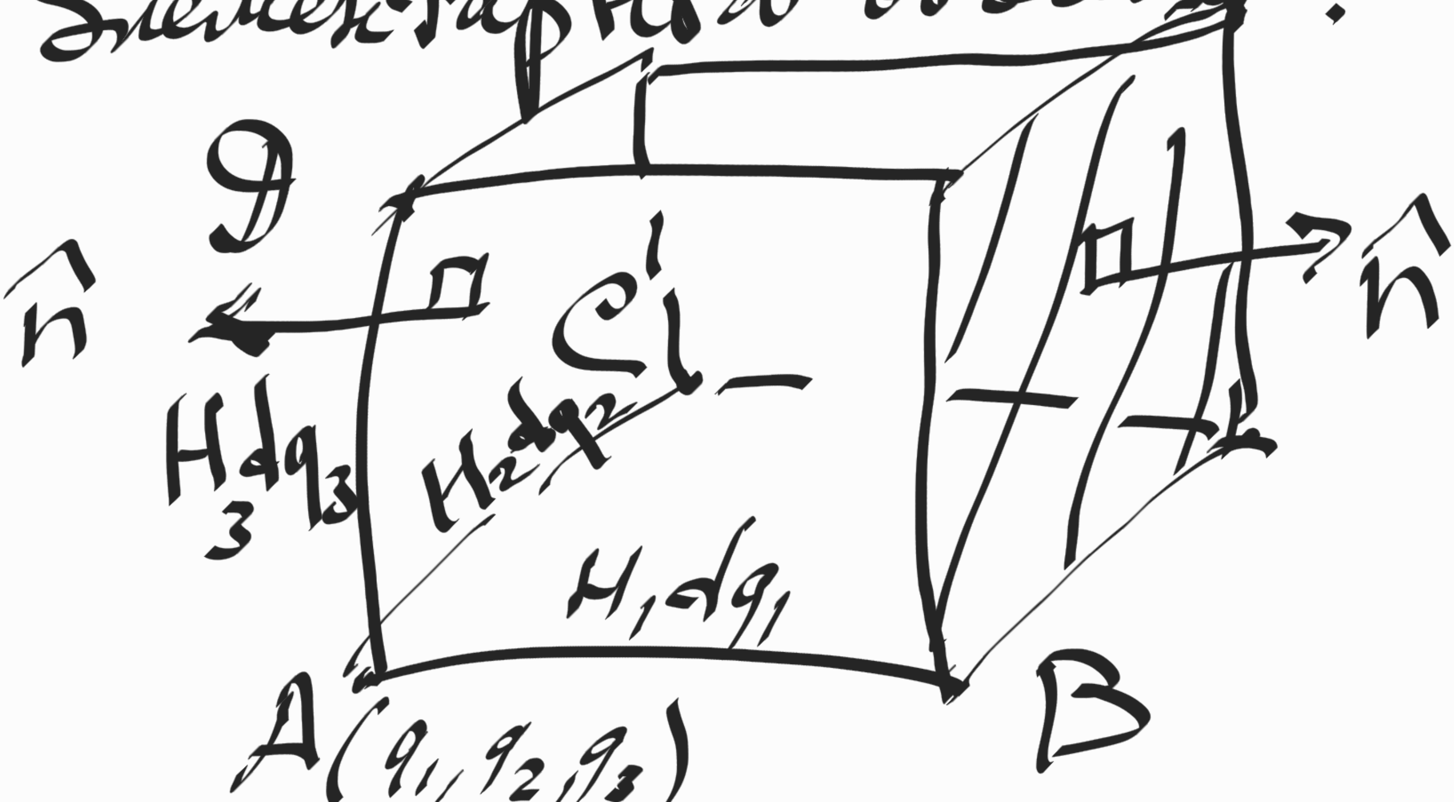
Расходимость этого

поля в некоторой (·) M определяется по формуле:

$$\operatorname{div}\vec{A} = \lim_{v_1 \to 0} \frac{\oiint_{S_1} (\vec{A}, \hat{n})\, ds}{v_1}$$

$(S_1 = \partial v_1)$.

Определим поток поля через поверхность элементарного объема:



A_{q_1} - проекция поля $\vec{A}$ на внешнюю нормаль на правой грани.

$-A_{q_1}$ - проекция вект. поля $\vec{A}$ на внешнюю нормаль на левой грани.

Т.о. поток вект. поля $\vec{A}$ через правую и левую грани:

$$A_{q_1} ds_2 ds_3 \Big|_{q_1+dq_1} \quad и \quad -A_{q_1} ds_2 ds_3 \Big|_{q_1}$$

Поток через обе грани (левую и правую):

$$A_{q_1} ds_2 ds_3 \Big|_{q_1+dq_1} - A_{q_1} ds_2 ds_3 \Big|_{q_1} =$$

(8)

$$= A_{q_1} H_2 H_3 dq_2 dq_3 \Big|_{q_1+dq_1} - A_{q_1} H_2 H_3 dq_2 dq_3 \Big|_{q_1} =$$

$$= \left[H_2 H_3 A_{q_1} \Big|_{q_1+dq_1} - H_2 H_3 A_{q_1} \Big|_{q_1} \right] dq_2 dq_3$$

$$\sim \frac{\partial \left(H_2 H_3 A_{q_1} \right)}{\partial q_1} dq_1 dq_2 dq_3 .$$

Аналогично поток через заднюю и переднюю грани:

$$\frac{\partial\left(H_3 H_1 A_{q_2}\right)}{\partial q_2} dq_1 dq_2 dq_3 .$$

Поток через верхнюю и нижнюю грани:

$$\frac{\partial\left(H_1 H_2 A_{q_3}\right)}{\partial q_3} dq_1 dq_2 dq_3 .$$

Теперь

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial\left(H_2 H_3 A_{q_1}\right)}{\partial q_1} + \right.$$

$$+\frac{\partial(H_3H_1A_{q_2})}{\partial q_2}+\frac{\partial(H_1H_2A_{q_3})}{\partial q_3}\Bigg]. \quad \ldots (10)$$

Пусть теперь поле $\vec{A}$ является потенциальным, т. е. $\vec{A}=\operatorname{grad} U$, где U – некоторое скалярное поле,

$$A_{q_1}=\lim_{\Delta s_1}\frac{\Delta U}{\Delta s_1}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial U}{\partial q_1},$$

$$A_{q_2}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial U}{\partial q_2},\quad A_{q_3}=\frac{1}{H_3}\frac{\partial U}{\partial q_3}.$$

Подставим полученное в ур-е (10) получим выражение для оператора Лапласа в криволинейных ортогональных координатах:

$$\Delta U = \operatorname{div}(\operatorname{grad} U) =$$

$$= \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial U}{\partial q_1}\right) + \right.$$

$$+ \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3 H_1}{H_2}\frac{\partial U}{\partial q_2}\right) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial U}{\partial q_3}\right)\Bigg] \ldots (11)$$

Уравнение Лапласа

$\Delta U = 0$

в координатах q_1, q_2, q_3:

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial U}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3 H_1}{H_2}\frac{\partial U}{\partial q_2}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial U}{\partial q_3}\right)=0$$

(12)

Сферические координаты:

Для сферич. координат формулы (2) принимают вид:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} ,$$

Причем, $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$.

Вычислим dS^2.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 =$$
$$= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2 \qquad (13)$$

Т.о. $H_1 = 1$, $H_2 = r$,

$H_3 = r \sin\theta$,

где $\theta \in [0, \pi]$, так что $H_3 \geq 0$.

Тогда из (12) получим ур-е Лапласа в сферич. координатах:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \sin\theta \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\right) = 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = 0 \qquad (14).$$