Лекция 16.11.21.

Соленоидальные поля (продолжение)

<u>Утверждение</u>:

Пусть $\vec{F}$ – соленоидально, $\vec{A}_1$, $\vec{A}_2$ – векторные потенциалы поля $\vec{F}$.

<u>Тогда</u>: $\vec{A}_1 = \vec{A}_2 + \text{grad}\, U$,

где U – $\forall$ три раза дифференцируемая функция.

<u>Док-во</u>:

$$\vec{F} = \mathrm{rot}\,\vec{A}_1 = \mathrm{rot}\,\vec{A}_2$$

$$\Rightarrow \mathrm{rot}(\vec{A}_1 - \vec{A}_2) = 0$$

$\Rightarrow \vec{A}_1 - \vec{A}_2$ - потенциальное поле

$$\Rightarrow \exists\, U : \vec{A}_1 - \vec{A}_2 = \mathrm{grad}\, U \quad \blacksquare$$

Уравнения Максвелла.

$\measuredangle$ следующий набор векторных полей:

$\vec{E}$ - электрическое поле

$\vec{H}$ - магнитное поле

$\vec{i}$ - вектор тока

$\vec{D}$ - электрическое смещение

$\vec{B}$ - вектор магнитной индукции.

Обобщение законов Био-Савара и Фарадея (два основных закона электродинамики):

$$\oint_{l} \langle \vec{H}, \hat{\tau} \rangle dl = \frac{4\pi}{c} \iint_{S} \langle \vec{i}, \hat{n} \rangle ds \quad (1)$$

$$\oint_{l} \langle \vec{E}, \hat{\tau} \rangle dl = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \iint_{S} \langle \vec{B}, \hat{n} \rangle ds \quad (2)$$

где c — скорость света в вакууме.

Уравнение (1) связывает циркуляцию вектора магнитного поля вдоль контура некоторой поверхности с потоком вектора тока через саму поверхность.

Уравнение (2) связывает циркуляцию вектора электрического поля с производной по времени от потока магнитной индукции через поверхность

В покоящейся однородной среде векторы $\vec{D}$ и $\vec{B}$ связаны с векторами $\vec{E}$ и $\vec{H}$ соотношениями:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \qquad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

ε - диэлектрическая проницаемость

μ - магнитная проницаемость среды.

Известно, что:

$$\vec{j} = \lambda\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \lambda\vec{E} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad 1)$$

где λ – коэф-т проводимости среды.

Смысл этих слагаемых заключается в следующем:

1) ток проводимости $(\lambda\vec{E})$

2) ток смещения $\left(\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$

Запишем в этих терминах уравнения (1) и (2):

$$\int_l \langle \vec{H}, \vec{\tau} \rangle dl = \qquad (3)$$

$$= \frac{1}{c} \iint_S \left(\lambda \langle \vec{E}, \hat{n} \rangle + \varepsilon \frac{\partial \langle \vec{E}, \hat{n} \rangle}{\partial t} \right) ds$$

$$\int_l \langle E, \hat{\tau} \rangle dl = -\frac{\mu}{c} \frac{d}{dt} \iint_S \langle \vec{H}, \hat{n} \rangle ds \qquad (4)$$

Левые части уравнений (3) и (4) могут быть по ф-ле Стокса преобразованы в интегралы по поверхности:

$$\iint\limits_S \langle \operatorname{rot} \vec{H}, \hat{n} \rangle dS \quad и$$

$$\iint\limits_S \langle \operatorname{rot} \vec{E}, \hat{n} \rangle dS ,$$

Таким образом ур-я (3) – (4) принимают вид:

$$\iint\limits_S \langle \underbrace{\left[c \operatorname{rot} \vec{H} - \left(\lambda \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \right]}, \hat{n} \rangle ds = 0 ,$$

$$\iint\limits_S \langle \left[c \operatorname{rot} \vec{E} + \mu \frac{\partial H}{\partial t} \right], \hat{n} \rangle ds = 0 .$$

Ввиду произвольности пов-ти S, а, следовательно, направления нормали $\hat{n}$ из полученных уравнений следует:

$$\begin{cases} c\,\mathrm{rot}\,\vec{H} = \lambda\vec{E} + \varepsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} & (5) \\ c\,\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\mu\dfrac{\partial H}{\partial t} & (6) \end{cases}$$

Получены уравнения Максвелла в дифференциальной форме.

Непосредственным следствием уравнений (5), (6) в рассматриваемом случае явл-ся соленоидальность векторов:

$$\varkappa \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

поскольку они представимы в виде ротора некоторого векторного поля.

Можно доказать, что

и сами векторные поля $\bar{E}$ и $\bar{H}$ соленоидальны в некоторой части пр-ва, если они были там таковыми в t начальный момент времени.

Для доказ-ва сформулированного утв-я введем две величины:

$$\mathrm{div}(\varepsilon \vec{E}) = \rho_e = \rho$$

— $\vec{D}$ "

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{div}(\underbrace{\mu\vec{H}}_{\vec{B}}) = \rho_m\end{array}\right\} \quad (7)$$

Здесь ρ_e и ρ_m – плотности электрического и магнитного зарядов.

Из ур-я (5) следует (применяя div слева и справа):

$$\operatorname{div}\left(\lambda\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \frac{\lambda}{\varepsilon}\operatorname{div}(\varepsilon\vec{E}) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}(\varepsilon\vec{E})=0$$

Т. е.

$$\frac{\lambda}{\varepsilon}\rho+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \qquad (8)$$

Ищем решение ур-я (8):

$$\frac{d\rho}{\rho}=-\frac{\lambda}{\varepsilon}dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\rho=-\frac{\lambda}{\varepsilon}t+\ln\rho_0$$

$$\rho=\rho_0 e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}t},$$

где ρ_0 — значение ρ

при $t = 0$.

Таким образом, если

в момент времени $t=0$

мы имеем $\rho_0 = 0$ $(\operatorname{div}\vec{E}_0 = 0)$,

то и при $\forall t$ $\rho = 0$,

т.е. $\operatorname{div}\vec{E} = 0$.

Аналогично, из ур-я (6)

следует

$$\operatorname{div} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{H} = 0.$$

Т.о., если $\operatorname{div} \vec{H_0} = 0$,

то $\operatorname{div} \vec{H} = 0$, $\forall t$.

Последнее уравнение равносильно равенству нулю магнитного заряда, что обычно и допускается.

Получим уравнения, в которые $\forall$ из векторных полей ($\vec{E}$ и $\vec{H}$) входят отдельно.

Применим "rot" к л.ч. и п.ч. уравнения (6):

$$-c\,\mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\,\vec{E}\right)=\mu\frac{\partial\,\mathrm{rot}\,\vec{H}}{\partial t}.$$

В силу уравнения (5):

$$c\left(\Delta\vec{E}-\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{E}\right)=$$

$$=\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\varkappa\vec{E}\right).$$

<u>Отсюда следует:</u>

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{\lambda}{\varepsilon}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{c^2}{\varepsilon \mu}\left(\Delta \vec{E} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E}\right). \tag{9}$$

Аналогичное уравнение можно получить и для $\vec{H}$.

При отсутствии электрических зарядов, т.е. в случае, когда $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, уравнение (9) имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{\lambda}{\varepsilon}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{c^2}{\varepsilon \mu}\Delta \vec{E}. \tag{10}$$

Уравнение (10) называется телеграфным уравнением.

Если мы имеем дело с совершенным диэлектриком, т.е. $\lambda = 0$, то уравнение (10) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = a^2 \Delta \vec{E} \text{ — } \frac{\text{волновое}}{\text{уравнение}}$$

$$a \equiv \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Если процесс стационарен, т.е. поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ не зависят от t, то ур-е (6) дает:

$\operatorname{rot} \vec{E} = 0$, т.е.

$\vec{E}$ - потенциальное векторное поле:

$\vec{E} = \operatorname{grad} \varphi$.

Тогда из первого из

уравнений (7):

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\varphi = \frac{1}{\varepsilon}\rho$$ или

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\varepsilon}\rho. \qquad (11)$$

В тех местах, где $\rho = 0$ (т.е. там, где электрич. заряды отсутствуют), мы получим для φ уравнение Лапласа

$$\Delta\varphi = 0 .$$