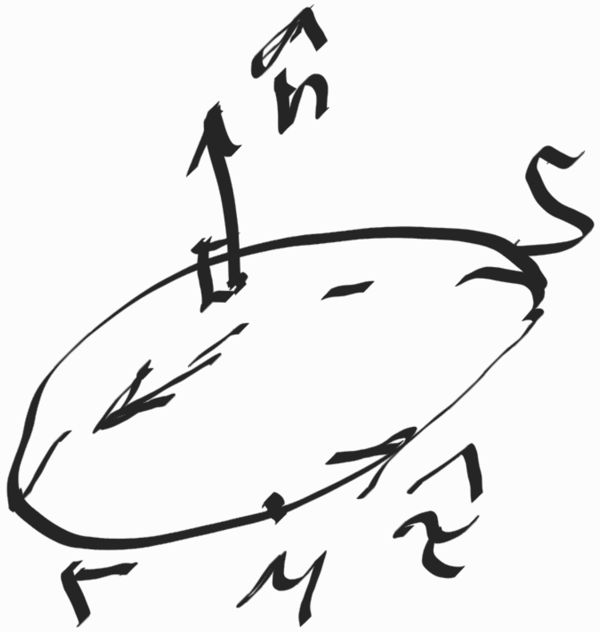
Лекция 10.11.21

Циркуляция. Формула Стокса. Ротор.



Формула Стокса:

$$\oint_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz +$$

$$+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\,dx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy \qquad (*)$$

$$\vec{F}=\begin{pmatrix}P\\Q\\R\end{pmatrix};$$

$$\operatorname{rot}\vec{F}=[\vec{\nabla}\times\vec{F}]=$$

$$=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ P & Q & R\end{vmatrix}=$$

$$=\hat{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\hat{j}\underline{\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)}+$$

$$+\hat{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=\text{ч.т.д.} \quad (*)$$

$\exists$ $\vec{F}$ - вект. поле

Γ - ориентир. кривая

$\hat{\tau}(M)$ - единичн. касат. в-р к Γ, построенный в (·) M.

$$A=\oint_{\Gamma}\langle\vec{F},\hat{\tau}\rangle\,dl \ -$$

- работа поля $\vec{F}$ вдоль контура Γ;

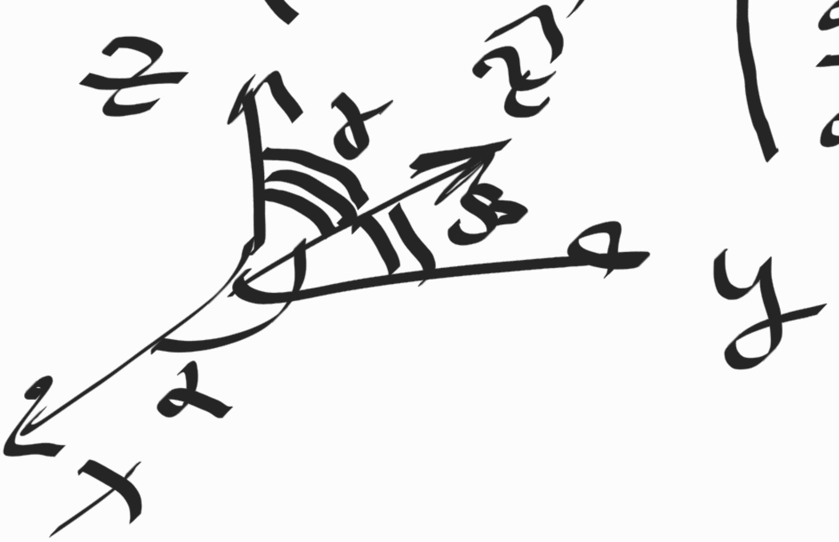
- циркуляция векторного

поля $\vec{F}$ вдоль контура Γ.

$$\oint_\Gamma \langle \vec{F}, \hat{\tau} \rangle \, dl =$$

$$= \oint_\Gamma (F_x \cos\alpha + F_y \cos\beta + F_z \cos\gamma) \, dl =$$

$$\left\{ \hat{\tau} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dl} \\ \frac{dy}{dl} \\ \frac{dz}{dl} \end{pmatrix} \right.$$



$$= \oint_\Gamma (F_x \, dx + F_y \, dy + F_z \, dz) =$$

$$= \oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \text{а.ч. } (*)$$

т.о. ф-ла Стокса $(*)$:

$$\boxed{\oint_\Gamma \langle \vec{F}, \hat{\tau} \rangle\, dl = \iint_S \langle \operatorname{rot} \vec{F}, \hat{n} \rangle\, dS}$$

$$(\operatorname{rot} \vec{F})_{\hat{n}} = \lim_{|S| \to 0} \frac{\iint_S \langle \operatorname{rot} \vec{F}, \hat{n} \rangle\, dS}{|S|} =$$

$$= \lim_{|S| \to 0} \frac{\oint_\Gamma \langle \vec{F}, \hat{\tau} \rangle\, dl}{|S|};$$

Ротор векторного поля $\vec{F}$, спроецированный на нормаль к поверхности, есть предел отношения циркуляции векторного поля вдоль контура, ограничивающего поверхность S, к величине $|S|$ при $|S| \to 0$.

Справедливы соотношения:

1) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} U) = 0$

2) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F}) = 0$

3) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \Delta u$

4) $\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{F}) -$

$$-\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \underline{\underline{\Delta\vec{F}}}$$

---

§ Потенциальное поле

def Поле $\vec{F}$ называется потенциальным (или безвихревым), если его ротор равен нулю.

$$[\operatorname{rot}\vec{F} = 0].$$

<u>Пример</u>:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega} \times \vec{r}] \quad (\vec{D} = [\vec{\omega} \times \vec{r}])$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ D_x & D_y & D_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{D} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(\omega_y z - y\omega_z) +$$

$$+ \hat{j}(x\omega_z - z\omega_x) +$$

$$+ \hat{k}(y\omega_x - x\omega_y) \;;$$

$$\operatorname{rot} \vec{\vartheta} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ z\omega_y - y\omega_z & x\omega_z - z\omega_x & y\omega_x - x\omega_y \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{i}(\omega_x + \omega_x) + \hat{j}(\omega_y + \omega_y) +$$

$+\hat{k}(\omega_z+\omega_z)=2\vec{\omega};$

<u>Т.О.</u>: $\operatorname{rot}\vec{v}=2\vec{\omega}$

<u>Утверждение</u>:

Поле $\vec{F}$ потенциально $\Longleftrightarrow$ когда $\exists$ скалярная функция U, такая что $\vec{F}=\operatorname{grad} U$,

U – потенциал поля $\vec{F}$.

<u>Доказательство</u>:

$\Leftarrow$ $\exists$ $\vec{F}=\operatorname{grad} U$.

Тогда $\operatorname{rot}\vec{F} = \operatorname{rot}(\operatorname{grad} U) =$

$= 0$ ■

$\Leftarrow$ $\exists \operatorname{rot}\vec{F} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y} \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x} \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}, \text{ где } \vec{F} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \quad (**)$$

Система (**) совпадает

с <u>Утверждением 2</u>

(одним из трех

эквив.-утв-ий для интегралов, не зависящих от пути в $\mathbb{R}^3$).

Тогда справедливо

<u>Утверждение 3</u>:

$\exists$ скалярная ф-я U,

$$dU = P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

где $P = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial U}{\partial y}$, $R = \frac{\partial U}{\partial z}$.

Тогда $\vec{F} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} = \operatorname{grad} U$$ ■

§ Соленоидальные поля

def Поле $\vec{F}$ называется соленоидальным, если $\operatorname{div} \vec{F} = 0$.

def $\vec{A}$ называется векторным потенциалом соленоидального поля $\vec{F}$, если $\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{A}$.

Утверждение: всякое соленоидальное поле обладает векторным потенциалом.

Доказ-во:

$\exists\ \vec{F} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ – соленоидальное поле.

Тогда справедливо: (***)

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

Ищем векторное поле

$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$, такое что

$$\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{A} \qquad (1)$$

Ур-е (1):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} = P & (2) \\ \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x} = Q & (3) \\ \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} = R & (4) \end{cases}$$

П $A_z = 0$.

из (2): $\dfrac{\partial A_y}{\partial z} = -P \Rightarrow$

$$A_y = -\int P\,dz \qquad (5)$$

из (3): $\dfrac{\partial A_x}{\partial z} = Q \Rightarrow$

$$A_x = \int Q\,dz \qquad (6)$$

из (4):

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = R \qquad (*)$$

$$\underbrace{-\int \frac{\partial P}{\partial x}\,dz} - \underbrace{\int \frac{\partial Q}{\partial y}\,dz} = \underbrace{\int \frac{\partial R}{\partial z}\,dz}_{=}$$

'' (5) '' (6) R

$\frac{\partial A_y}{\partial x}$ $\qquad$ $\frac{\partial A_x}{\partial y}$

Ур-е (*) принимает вид:

$$\int \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dz=0$$

$$\underline{\forall\ x, y \in V \subset \mathbb{R}^3}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$$

$\operatorname{div}\vec{F}$ '' $\blacksquare$

Задача:

Проверив, что поле
$\vec{A} = \{x-y+z,\ y+z-x,\ x+y-2z\}$
соленоидально, найти
его векторный потенциал.

Решение:

$\exists\ \vec{A} = \operatorname{rot} \vec{G}.$

Проверим, что $\operatorname{div} \vec{A} = 0$:

$$\{\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{G}) = 0\}$$

$\operatorname{div} \vec{A} = 1 + 1 - 2 = 0.$

Ищем потенциал по формуле Пуанкаре:

$$\vec{G}(x,y,z) = \int_0^1 dt\,[\vec{A}(t\vec{r}) \times t\vec{r}] \quad (7)$$

где $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$\vec{G}$ - решение уравнения

$$\operatorname{rot} \vec{G} = \vec{A}$$

Компоненты поля $\vec{A}$ обеспечивают существовше (7).

<u>Воспользуемся формулой Пуанкаре:</u>

$$\vec{C}(x,y,z)=$$

$$=\int_0^1 dt \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ tx-ty+tz & ty+tz-tx & tx+ty-2tz \\ tx & ty & tz \end{vmatrix}$$

$$=\int_0^1 t^2 dt \Big[\hat{i}\left(yz+z^2-xz-yx-y^2+2yz\right)$$

$$-\hat{j}\left(xz-yz+z^2-x^2-xy+2xz\right)+$$

$$+\hat{k}\left(\cancel{xy}-y^2+yz-\cancel{xy}-xz+x^2\right)\Big]=$$

$$=\frac{\hat{i}}{3}\left(3yz-xz-xy+z^2-y^2\right)-$$

$$-\frac{\hat{j}}{3}\left(3xz-yz-xy+z^2-x^2\right)+$$

$$+\frac{\hat{k}}{3}\left(yz-xz+x^2-y^2\right);$$

Проверим, что спр-во:

$$\mathrm{rot}\,\vec{G}=\vec{A}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{G}=$$

$$= \frac{1}{3}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ (3yz - xz - xy + z^2 - y^2) & (-3xz + yz + xy - z^2 + x^2) & (yz - xz + x^2 - y^2) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\hat{i}}{3}\left(z - 2y + 3x - y + 2z\right) +$$

$$+ \frac{\hat{j}}{3}\left(3y - x + 2z + z - 2x\right) +$$

$$+ \frac{\hat{k}}{3}\left(-3z + y + 2x - 3z + x + 2y\right) =$$

$$= \hat{i}\left(z - y + x\right) + \hat{j}\left(y - x + z\right) +$$

$$+ \hat{k}\left(-2z + y + x\right) \quad \blacksquare$$