Лекция 09.11.21.

Криволинейные интегралы в пространстве не зависящие от пути.

∃ интеграл

$$\gamma = \int_A^B P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

не зависит от пути в области $V \subset \mathbb{R}^3$.

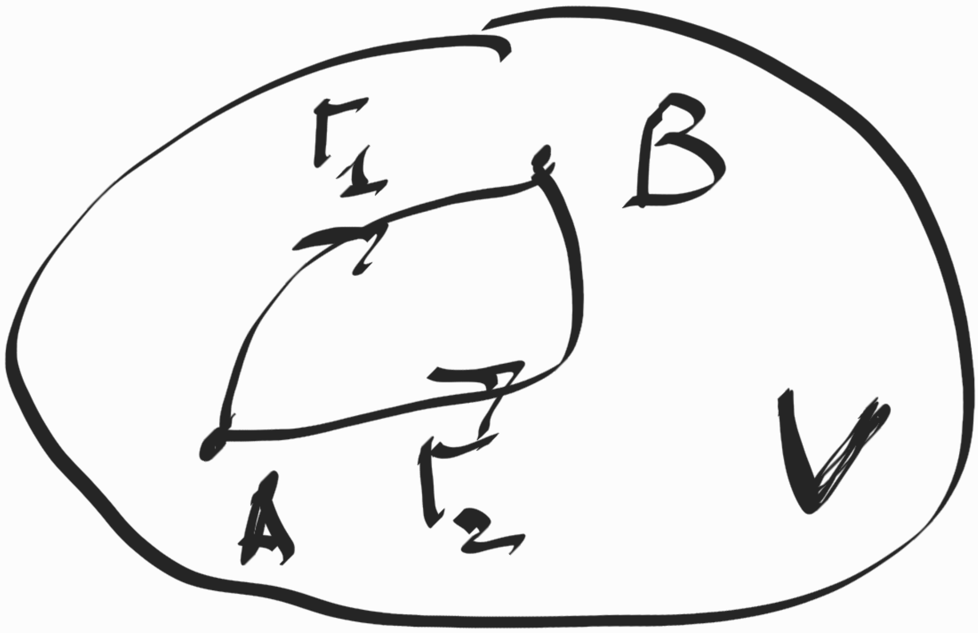
$\Updownarrow$

Интеграл

$$\oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0,$$

$\forall\ \Gamma \subset V$,

где Γ – замкнутый



$$\int\limits_{(AB)_{\Gamma_1}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \int\limits_{(AB)_{\Gamma_2}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

$$\oint\limits_{\Gamma} = \int\limits_{(AB)_{\Gamma_1}} - \int\limits_{(AB)_{\Gamma_2}} = 0$$

Сформулируем три эквивалентных утверждения для таких интегралов:

Утв-е 1:

интеграл

$$\int_A^B P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

не зависит от пути в области $V \subset \mathbb{R}^3$.

Утв-е 2:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z} \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} \end{cases}$$ в области V.

Утв-е 3:

$\exists$ функция $U(x, y, z)$ в области V, такая что:

$$dU = P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

$$P=\frac{\partial u}{\partial x},\quad Q=\frac{\partial u}{\partial y},\quad R=\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$B(x,y,z)$$

$$u(x,y,z)=\int P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

$$A(x_0,y_0,z_0)$$

восстанавливается с точностью до постоянной

Пример 1

$$J=\int_{\Gamma} \underbrace{yz}_{P}\,dx+\underbrace{xz}_{Q}\,dy+\underbrace{xy}_{R}\,dz$$

Проверим, что J не зависит от пути

(утв-е 2):

Проверка: $\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial y} = x = \dfrac{\partial Q}{\partial z} \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = y = \dfrac{\partial R}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = z = \dfrac{\partial P}{\partial y} \end{cases}$

(утв-е 2 выполняется)

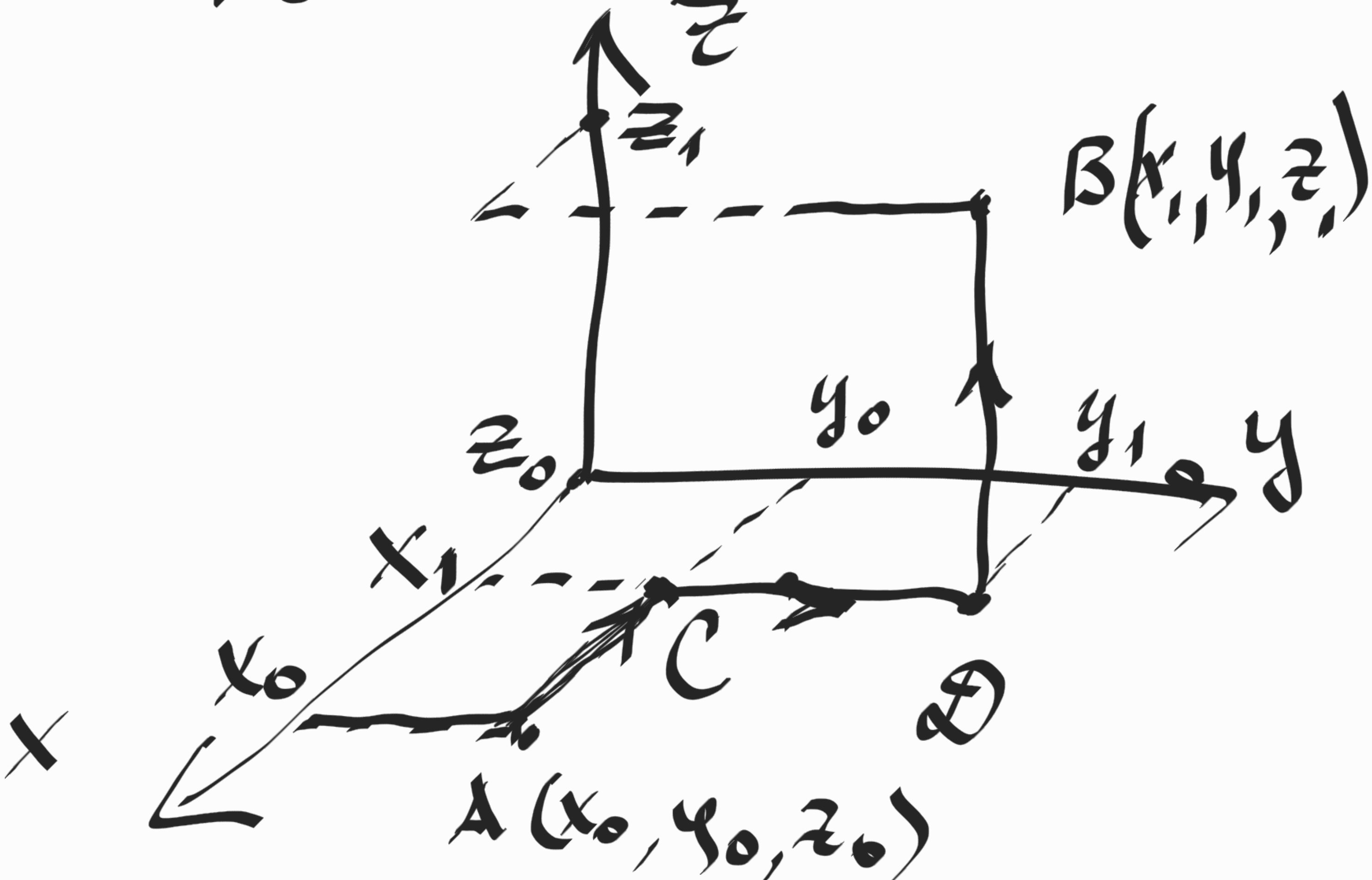
Согласно утв-ю 3)

$\exists\, U,\ dU = Pdx + Qdy + Rdz$

$U(x_1, y_1, z_1) =$

$$= \int\limits_{A(x_0,y_0,z_0)}^{B(x_1,y_1,z_1)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz =$$

Выберем путь Г от точки A до точки B вдоль ломаной, звенья которой параллельны координатным осям:



$$= \int_{x_0}^{x_1} y_0 z_0 \, dx + \int_{y_0}^{y_1} x_1 z_0 \, dy +$$

$$\underset{[AC]}{} \qquad \underset{[CD]}{}$$

$$+ \int_{z_0}^{z_1} x_1 y_1 \, dz =$$

$$\underset{[DB]}{}$$

$$= \cancel{x_1 y_0 z_0} - x_0 y_0 z_0 +$$

$$+ \cancel{x_1 y_1 z_0} - \cancel{x_1 y_0 z_0} +$$

$$+ x_1 y_1 z_1 - \cancel{x_1 y_1 z_0} =$$

$$= x_1 y_1 z_1 - x_0 y_0 z_0 .$$

const

Т.о. $U(x,y,z) =$

$= xyz + Const$.

Пример 2:

$\exists \quad dU = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$.

Найти: $U(x,y,z)$.

Решение:

Известно, что:

(1) $\frac{\partial u}{\partial x} = yz$, $\frac{\partial u}{\partial y} = xz$, (2)

(3) $\frac{\partial u}{\partial z} = xy$.

Тогда (из того, что $\frac{\partial u}{\partial x} = yz$)

$$u = xyz + \varphi(y, z) \quad (4)$$

Тогда из ур-я (2):

$$\frac{\partial u}{\partial y} \overset{(2)}{=} xz \overset{(4)}{=} xz + \underbrace{\frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y}}_{0}$$

$$\Rightarrow \underline{\varphi = \varphi(z)}$$

из (3) $\Rightarrow$ $\frac{\partial u}{\partial z} = xy \overset{(4)}{=}$

$$= xy + \frac{d\varphi}{dz}$$

(ф-я одной переменной)

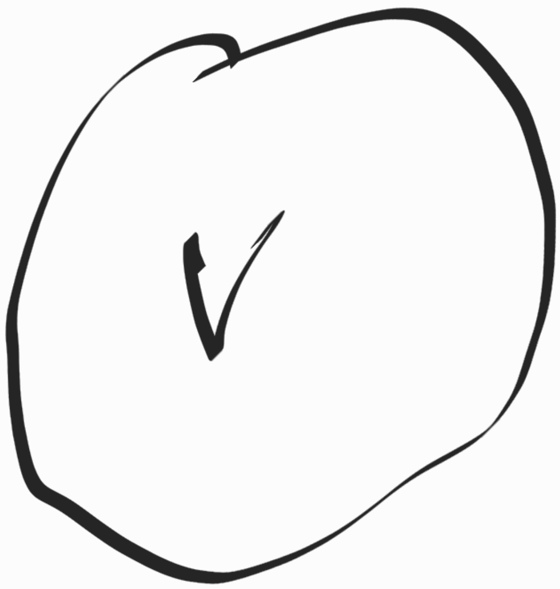
$$\Rightarrow \frac{d\varphi}{dz} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = \text{const}.$$

Т.о., из ур-я (4)

$$u(x,y,z) = xyz + \text{Const}. \quad \blacksquare$$

Элементы векторного анализа.



$\exists\ u(x,y,z)$ — скалярное поле в обл-ти V.

$\exists\ \vec{A}(x,y,z)$ — векторное поле в обл-ти V.

<u>Градиент</u>:

$$\measuredangle\ \vec{\nabla} u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix} = \operatorname{grad} u$$

Оператор: $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$

$\exists\ \hat{e}$ – некоторый единичный вектор

$$\frac{\partial u}{\partial e} = \langle \vec{\nabla} u, \hat{e} \rangle =$$

$$= |\vec{\nabla} u| \cos(\vec{\nabla} u, \hat{e})$$

(производная по направлению)

$\frac{\partial u}{\partial e}$ принимает наибольшее значение при: $\hat{e} \uparrow\uparrow \vec{\nabla} u$.

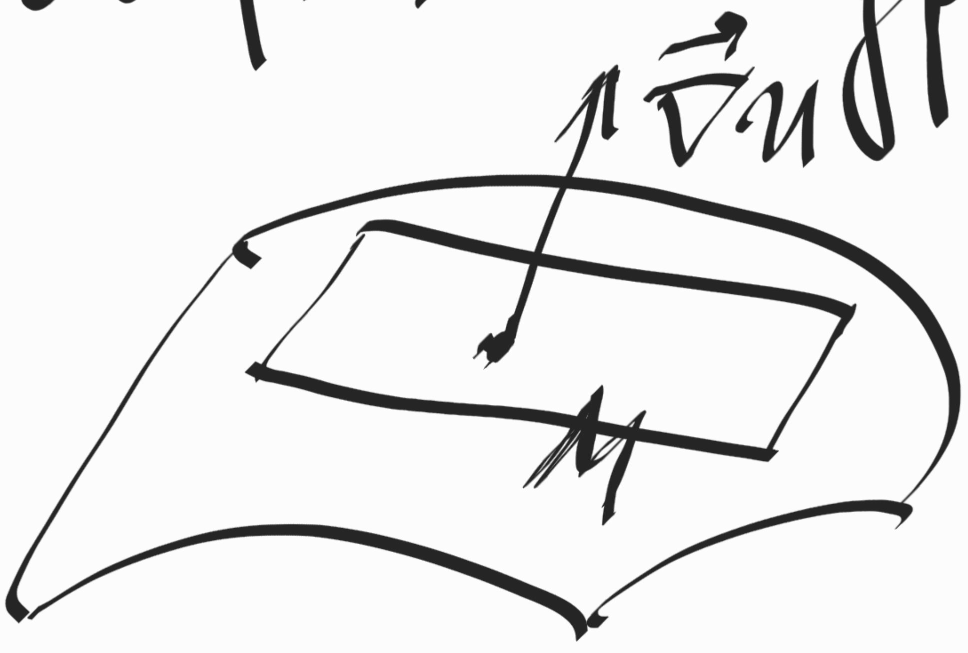
def $\vec{\nabla} u$ - вектор, направленный в сторону наискорейшего возрастания u, и имеющий длину, равную скорости этого роста.

$\forall$ поверхность $u(x, y, z) = C$,

где C - некоторая постоянная.

Такая поверхность называется "поверхностью уровня".

$\vec{\nabla} u$ ортогонален "поверхности уровня".



$u(x,y,z) = C$

$\frac{\partial U}{\partial x^1} \overset{?}{\neq} 0$ (не может быть).

т.о. $\forall$ проекция $\vec{\nabla} U$ на касат. пл-ть равна нулю!

$\Rightarrow \vec{\nabla} U \perp$ касат. пл-ти.

$\Rightarrow \vec{\nabla} U \perp$ пов-ти уровня. $\blacksquare$

<u>Пример</u>:

$*$ сферу: $x^2+y^2+z^2=R^2$.

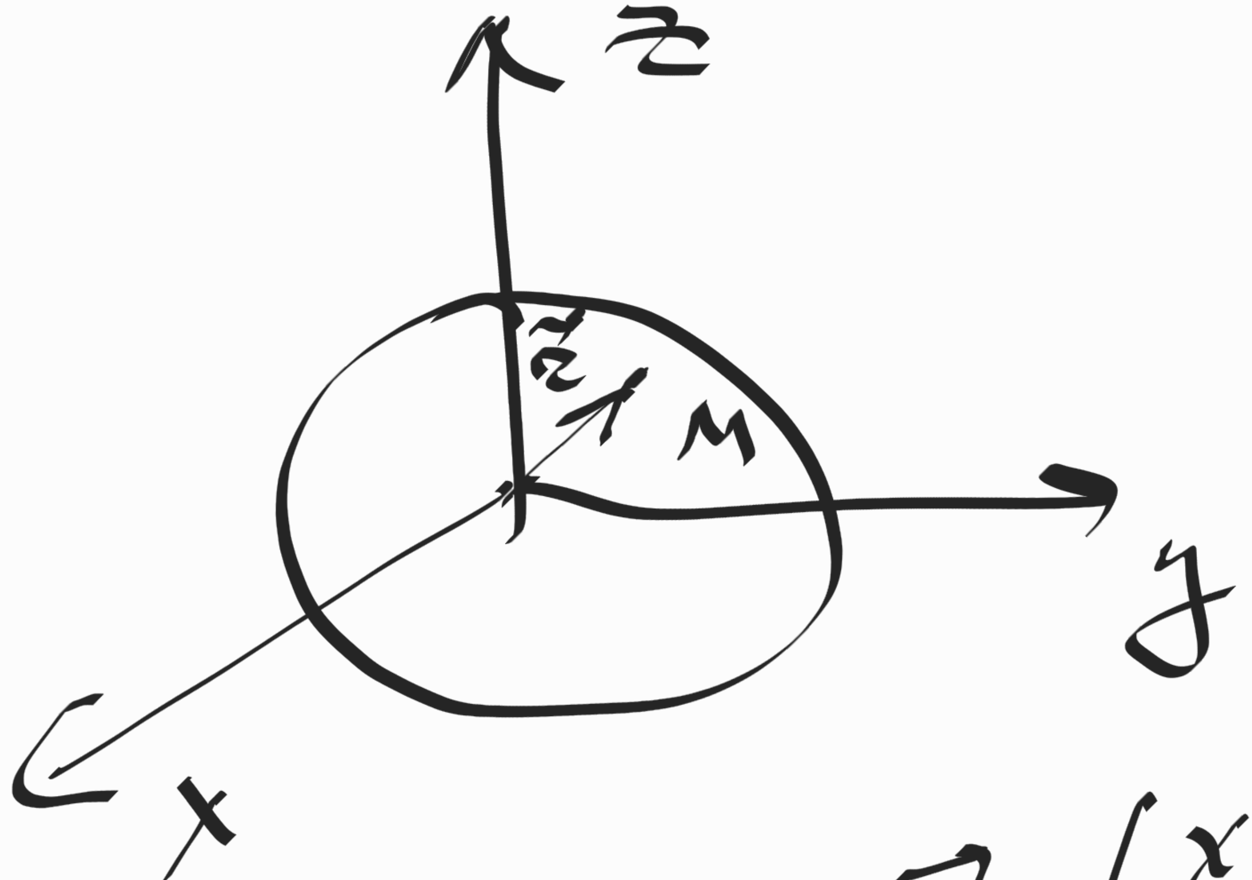
$*$ $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

сфера — поверхность уровня.

$$\vec{\nabla} u_1 = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\vec{r}$$

V

где $\vec{r}$ — радиус вектор произв. точки в $V \subset \mathbb{R}^3$.



Радиус-вектор $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ всегда ортогонален сфере $x^2+y^2+z^2=R^2$, т.е. поверхности уровня скалярного поля $U(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$.

§ Формула Остроградского-Гаусса. Дивергенция

Пусть S – простая замкнутая пов-ть в $\mathbb{R}^3$,

P, Q, R – непрер. диф-мы по своим аргументам в V и её окрестности $\subset \mathbb{R}^3$,

$\partial V = S$.

Ф-ла Остроградского-

– Гаусса:

$$\oiint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy =$$

$$= \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

Ј $\vec{F} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ – векторное поле.

$$\operatorname{div} \vec{F} = \langle \vec{\nabla}, \vec{F} \rangle \equiv$$

$$\equiv \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

(дивергенция векторного

поля $\vec{F}$).

* поток векторного поля $\vec{F}$ через поверхность S (S - ориентирована);
[S - здесь не обязат. замкнута]

$\iint\limits_S \langle \vec{F}, \hat{n} \rangle \, dS$ - поток через п-ть S

Пример 1: $\exists$ $\vec{v}$ - поле скоростей жидкости в области V.

$$dQ = \langle \vec{v}, \hat{n} \rangle dS \text{ —}$$

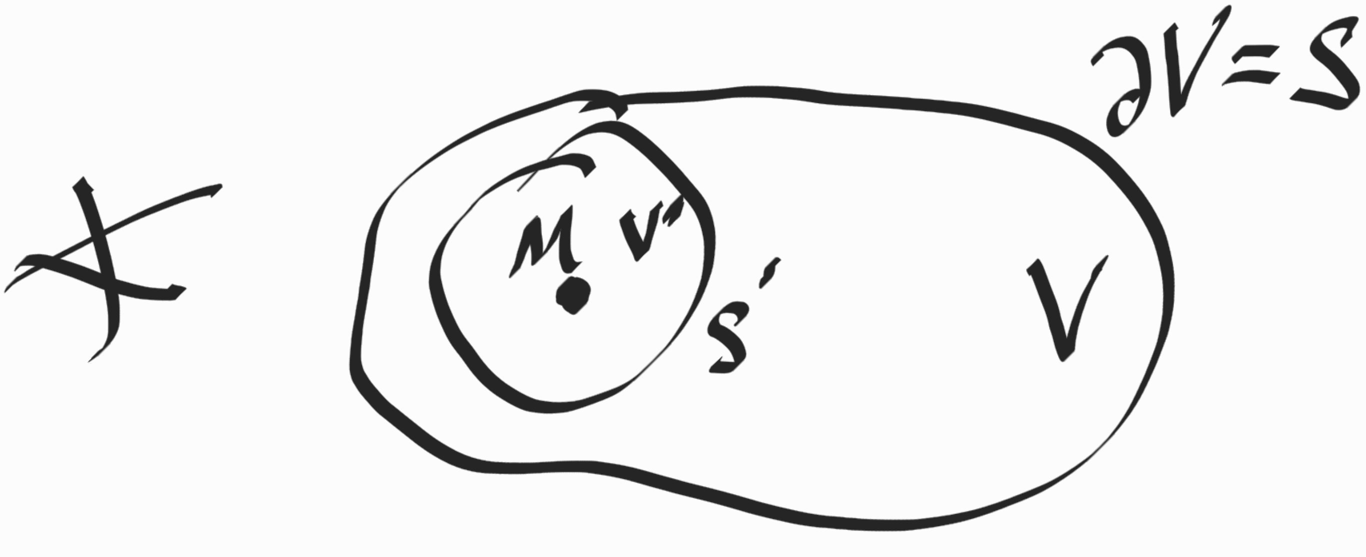
— поток поля скоростей жидкости через пов-ть dS.

$$Q \equiv \iint_S \langle \vec{v}, \hat{n} \rangle dS \text{ —}$$

— поток поля скоростей жидкости через полную пов-ть S.

Запишем ф-лу Остроградского-Гаусса в терминах векторного анализа:

$$\oiint\limits_S (\vec{F}, \vec{n})\, ds = \iiint\limits_V \operatorname{div} \vec{F}\, dV$$



$$\Rightarrow \lim_{|V'|\to 0} \frac{\iiint\limits_{V'} \operatorname{div}\vec{F}\,dV}{|V'|} =$$

$$= \lim_{|V'|\to 0} \frac{\iiint\limits_{V'} \left(\operatorname{div}\vec{F}(M) + o(1)\right) dV}{|V'|}$$

$$\langle \vec{\nabla}(\operatorname{div}\vec{F}), \vec{dl} \rangle$$

$$= \lim_{|V'|\to 0} \frac{\operatorname{div}\vec{F}(M)\,|V'| + O\left(|V'|^{1+\varepsilon}\right)}{|V'|}$$

$$(\varepsilon > 0)$$

$$= \operatorname{div}\vec{F}(M) \; ;$$

$$\underline{\underline{\text{def}}}\ \operatorname{div}\vec{F}(M) = \lim_{|V'|\to 0} \frac{\oiint_{S'} (\vec{F}, \hat{n})\, ds}{|V'|};$$

Отношение потока векторного поля через замкнутую поверхность S' к $|V'|$ при $|V'|\to 0$ есть **дивергенция векторного поля**;