Лекция 7.12.21

Пример 1:

$$y'' - 5y' + 6y = 4\sin 2x$$

Решение:

1) характеристич. ур-е:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ – корни

$\varkappa_1 = \varkappa_2 = 1$ – их кратности

общее р-е однор. ур-я:

$$y_0(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

2) Ищем частное р-е:

Поскольку $r=0$, $L=2$

$r \pm iL = \pm 2i$

$\pm 2i \notin \{2,3\}$.

Тогда ищем частное решение в виде

$y_1 = a_1 \cos 2x + b_1 \sin 2x$.

Подставим анзац в неоднор-е ур-е:

$-4a_1 \cos 2x - 4b_1 \sin 2x +$

$+10a_1 \sin 2x - 10b_1 \cos 2x +$

$+6a_1 \cos 2x + 6b_1 \sin 2x = 4 \sin 2x$

$(2a_1 - 10b_1)\cos 2x + (2b_1 + 10a_1)\sin 2x =$

$= 4 \sin 2x \qquad (*)$

$\cos x: \begin{cases} 2a_1 - 10b_1 = 0 \\ 2b_1 + 10a_1 = 4 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1 = 5b_1 \\ 2b_1 + 50b_1 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = \frac{1}{13} \\ a_1 = \frac{5}{13} \end{cases}$

$$y_1(x) = \frac{5}{13}\cos 2x + \frac{1}{13}\sin 2x$$

Общее р-е неоднор. ур-я есть сумма $y_0(x)$ и $y_1(x)$:

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{5}{13}\cos 2x + \frac{1}{13}\sin 2x$$

Пример 2:

$$y^{(IV)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y =$$

$$= x\sin x \qquad (0)$$

Решение:

1) характеристич. ур-е:

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)^2(\lambda^2 + 1) = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1, & \underline{\varkappa_1 = 2} \\ \lambda_{2,3} = \pm i, & \varkappa_2 = \varkappa_3 = 1 \end{cases}$$

Общее р-е однор. ур-я:

$$y_0(x) = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

2) Ищем частное решение.

$$x \sin x = e^{0\cdot x}[P_1(x)\sin x]$$

$f(x)$

степень полинома

$r = 0, \quad L = 1$

$r \pm iL = \pm i$

$\pm i$ – корни характер. ур-я кратности 1.

Тогда частное р-е принимает вид:

$y_r(x) = x^2(ax+b)\cos x +$

$+ x^2(cx+d)\sin x.$

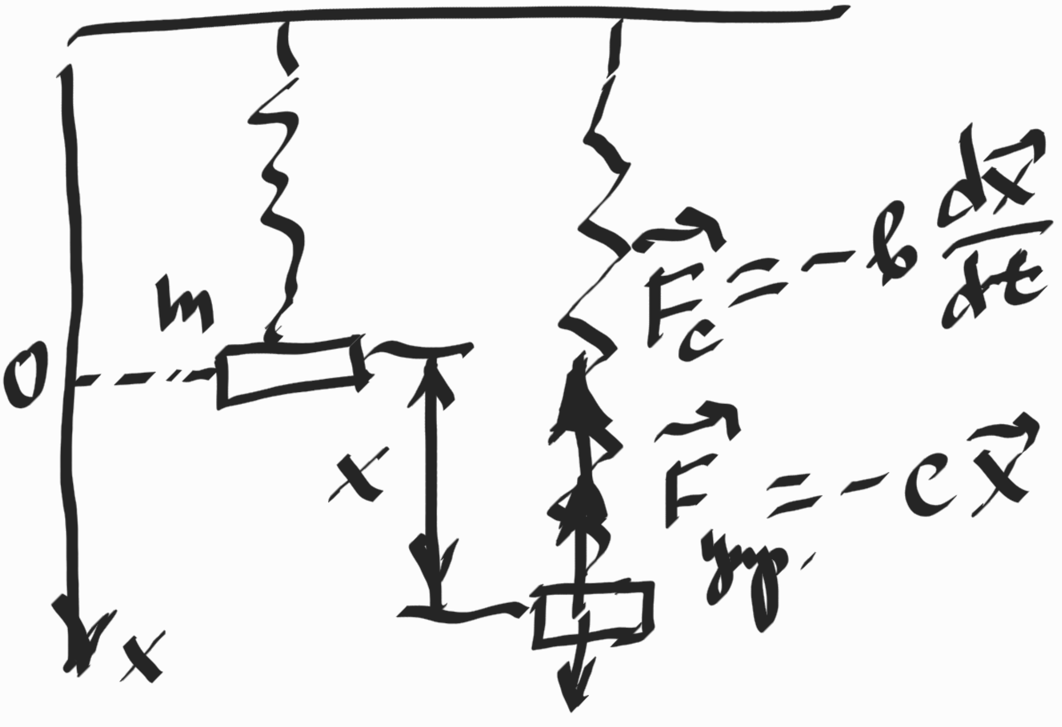
a, b, c, d - искомые коэф-ы.

$$\left.\begin{array}{l} x^2\cos x: \ - - - . \\ x\cos x: \ - \ . \ . \\ x^2\sin x: \ - - - . \\ x\sin x: \ - - - . \end{array}\right\} (*)$$

Возникнет система 4-х ур-ий с 4-мя неизвестными: a, b, c, d.

§ Линейные уравнения и колебательные явления.

Задача: рассмотрим вертикальные колебания подвешенного на пружине тела массы m.



$m\vec{g}$

$\exists$ x – расстояние тела по вертикали от полож-я равновесия

$\vec{F}_c$ - сопротивление вязкой среды, в которой происходят колеб-я.

Запишем ур-е второго закона Ньютона в проекции на ось x:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - b\frac{dx}{dt} - cx$$

$$mx'' + bx' + cx = mg$$

$$x'' + \frac{b}{m}x' + \frac{c}{m}x = g$$

1) Корни характер. ур-я ищем:

$$\lambda^2 + \frac{b}{m}\lambda + \frac{c}{m} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \left(-\frac{b}{m} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{b^2}{m^2} - \frac{4c}{m}}}_{<0}\right)\frac{1}{2}$$

$c \gg b > 0$

Тогда общее решение неоднор. ур-я:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \text{Const}$$

$$= C_1 e^{-\frac{b}{2m}t} \cos Lt +$$

$$L = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4c}{m} - \frac{b^2}{m^2}}$$

$$+ C_2 e^{-\frac{b}{2m}t} \sin \omega t + const.$$

При больших t колебания прекращаются.

В приложениях свободный член часто бывает синусоидальной величиной, это ведет к уравнению:

$$x'' + 2hx' + k^2 x = H_0 \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (1)$$

характеристич. ур-е:

$$\lambda^2 + 2h\lambda + k^2 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - k^2} =$$

$$= -h \pm ip, \quad p \equiv k^2 - h^2$$

$$(k > h > 0)$$

$$\omega \neq \lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$$

$$\cap \mathbb{R}$$

Ищем частное решение ур-я (1):

$$x_1(t) = N \sin(\underbrace{\omega t + \varphi_0}_{} + \underbrace{\delta}_{}) = \qquad (2)$$

$$= N \sin(\omega t + \varphi_0) \cos\delta +$$

$$+ N \cos(\omega t + \varphi_0) \sin\delta$$

Подставляя предст-е (2) в ур-е (1) найдем коэф-ы N и δ:

$$\begin{cases} N = \dfrac{H_0}{\sqrt{(k^2-\omega^2)^2+4h^2\omega^2}}, \\ \cos\delta = \dfrac{k^2-\omega^2}{\sqrt{(k^2-\omega^2)^2+4h^2\omega^2}}, \\ \sin\delta = -\dfrac{2h\omega}{\sqrt{(k^2-\omega^2)^2+4h^2\omega^2}} \end{cases}$$

Тогда общее решение неоднородного

уравнения (1) принимает вид:

$$x(t) = Ae^{-ht}\sin(pt+\varphi) + \frac{H_0}{(k^2-\omega^2)+4h^2\omega^2}\sin[\omega t+\varphi_0+\delta] \quad (3)$$

$$0 < h << 1$$

Отметим, что при больших временах первое слагаемое в (3) экспоненциально затухает и играет роль лишь при малых временах (устанавливающийся процесс).

В дальнейшем величина $x(t)$ определяется почти исключительно вторым слагаемым (установившийся процесс).

Отметим, что при изменении частоты вынуждающих колебаний ω амплитуда вынужденных колебании (во втором слагаемом уравнения (3)) резко возрастает при $\omega^2 \sim k^2$. При дальнейшем увеличении ω амплитуда колебаний снова падает.

Это явление называется <u>явлением резонанса</u>.

<u>Замечание</u>:

I правая часть уравнения

$$y''+py'+qy=f(x)$$

есть сумма двух слагаемых:

$$y''+py'+qy=f_1(x)+f_2(x) \qquad (4)$$

Положим также, что $u_1(x)$ и $u_2(x)$ - решения уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &u_1''+pu_1'+qu_1=f_1(x), \\ &u_2''+pu_2'+qu_2=f_2(x). \end{aligned}\right\}$$

Сложим почленно эти

уравнения:

$$(u_1+u_2)''+p(u_1+u_2)'+q(u_1+u_2)=$$

$$=f_1(x)+f_2(x).$$

Т.о. $\underset{\sim\sim\sim}{u_1+u_2}$ - есть частное решение уравнения (4).

Аналогичные результаты справедливы для ур-я произвольного порядка:

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny= \qquad (5)$$

$$=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_k(x).$$

Частное решение уравнения (5) есть:

$$y_1(x)=\sum_{i=1}^{k} u_i(x),$$ где

$$u_i^{(n)}+a_1 u_i^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1} u_i'+$$
$$+a_n u_i=f_i(x),$$
$$i=1,2,\ldots,k.$$

Возвращаясь к предыдущему примеру, когда правая часть ур-я имеет вид суммы нескольких синусоид, величин:

$$x'' + 2hx' + k^2 x = \sum_{i=1}^{m} H_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) \quad (6)$$

частное решение ищем в виде:

$$x_1(t) = \sum_{i=1}^{m} N_i \sin(\omega_i t + \varphi_i + \delta_i) \quad (7).$$