Лекция 1.12.21

Пример 1:

$$y^{(n)} = 0$$

Решение:

$\lambda^n = 0$ – характерист. полином

$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$

$\lambda = 0$ – корень кратности n

$$y(x) = P_{n-1}(x)$$

Пример 2:

$$y''' - 4y'' + 3y' = 0$$

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda = 0$$ – характ. ур-е

$$\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 3$$

корни характер. полинома.

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1.$$

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{x} + C_3 e^{3x},$$

где C_1, C_2, C_3 – произв. постоянные.

Пример 3:

$$y'' + \omega^2 y = 0, \quad \omega > 0$$

<u>Решение</u>:

$\lambda^2 + \omega^2 = 0$ – характер. ур-е

$$(\lambda + i\omega)(\lambda - i\omega) = 0$$

$\lambda_1 = i\omega$, $\varkappa_1 = 1$

$\lambda_2 = -i\omega$, $\varkappa_2 = 1$.

$$y(x) = C_1 e^{i\omega x} + C_2 e^{-i\omega x} =$$

$$= \tilde{C}_1 \sin\omega x + \tilde{C}_2 \cos\omega x,$$

где:

$\tilde{C}_2 = C_1 + C_2$, $\tilde{C}_1 = i(C_1 - C_2)$

§ Неоднородные линейные диффер. ур-я n-го порядка

$*$ ур-е

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),$$

где a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ – произв. веществ. постоянные

$f(x)$ – известная ф-я (интегрируемая на $[x_1, x_2]$

$x \in [x_1, x_2]$.

<u>Пример</u>:

$$y^{(n)} = f(x) \qquad (*)$$

$\rceil$ $n = 1$:

$$y' = f(x) \Rightarrow y(x) = \int_0^x f(u)\,du + C_1$$

<u>$\rceil$ $n = 2$</u>:

$$y'' = f(x) \Rightarrow y'(x) = \int_0^x f(u)\,du + C_1$$

$$\Rightarrow y(x) = \int_0^x du \int_0^u dv\, f(v) + C_1 x + C_2 \equiv$$

$$= \int_0^x dv \int_v^x du\, f(v) + C_1 x + C_2 =$$

$$= \int_0^x dv\, (x-v) f(v) + C_1 x + C_2$$

Утверждение:

$\exists$ n – произвольно

в уравнении: $y^{(n)} = f(x)$

$$y(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-v)^{n-1} f(v)\,dv+ + P_{n-1}(x).$$

<u>Д-во (методом математ. индукции):</u>

1) $n=1$ (рассмотрено выше).

2) $\forall$ случай $n=k-1$.

<u>По предположению:</u>

$$y=\frac{1}{(k-2)!}\int_0^x (x-v)^{k-2} f(v)\,dv+ + P_{k-2}(x).$$

3) Проверим утверждение

для случая $\underline{n = k}$.

При $n = k$

$$y^{(k)} = (y')^{(k-1)} = f(x)$$

Тогда по предположению

$$\underset{\sim}{y'(x)} = \frac{1}{(k-2)!} \int_0^x (x-v)^{k-2} f(v)\,dv + \widetilde{P}_{k-2}(x)$$

$$\underset{\sim}{y(x)} = \int_0^x du \int_0^u \frac{1}{(k-2)!} (u-v)^{k-2} f(v)\,dv + P_{k-1}(x) =$$

$$= \int_0^x f(v)\,dv \int_v^x \frac{1}{(k-2)!}(u-v)^{k-2}\,du + P_{k-1}(x) =$$

$$= \frac{1}{(k-1)!} \int_0^x f(v)\,dv\,(x-v)^{k-1} + P_{k-1}(x) \quad \blacksquare$$

<u>Решаем ЛНДУ</u>

<u>произвольного вида:</u>

$$\varphi(D)y = f(x), \qquad (I)$$

где $D \equiv \frac{d}{dx}$,

$$\varphi(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ – веществ. постоянные

1) общее решение соответств. однор. ур-я

$\varphi(D)y = 0 \qquad (\mathrm{II})$

было исследовано на прошлой лекции.

2) осталось найти частное решение уравнения (I), и прибавить его к общему решению однор. ур-я.

т.о. будет получено общее решение ур-я (I).

Используем символический метод.

Разложим рациональную дробь $\frac{1}{\varphi(D)}$ на простейшие дроби (обратный полином от символа D):

$$\frac{1}{\varphi(D)} = \sum_{s=1}^{k} \sum_{q=1}^{\varkappa_s} \frac{A_s^{(q)}}{(D-\lambda_s)^q}$$

Определим функцию $\xi(x)$ по формуле:

$y(x) = \xi(x) =$

$$= \sum_{s=1}^{k} \sum_{q=1}^{\alpha_s} \frac{A_s^{(q)}}{(D-\lambda_s)^q} f(x) =$$

$$= \sum_{s,q} A_s^{(q)} y_{qs}(x). \qquad (*)$$

Здесь $A_s^{(q)}$ — постоянные (опред-ся разл-ем обр-го полинома на простейшие), а функции $y_{qs}(x)$ определяются из уравнений:

$$(D-\lambda_s)^q y_{qs}(x) = f(x).$$

Ищем ф-ции $y_{qs}(x)$:

$$\underbrace{e^{\lambda_s x}}\,\underbrace{e^{-\lambda_s x}}(D-\lambda_s)^q y_{qs} = f$$

$$D^q\left(e^{-\lambda_s x} y_{qs}\right) = e^{-\lambda_s x} f$$

<u>Тогда:</u>

$$e^{-\lambda_s x} y_{qs} = \frac{1}{(q-1)!}\int_0^x (x-u)^{q-1} e^{-\lambda_s u} \cdot$$

$$\cdot f(u)\,du.$$

<u>Т.о.</u>

$$y_{qs}(x) = \frac{e^{\lambda_s x}}{(q-1)!}\int_0^x (x-u)^{q-1} e^{-\lambda_s u} f(u)\,du$$

$$(\ast\ast)$$

Т.о. уравнения

(*) и (**) определяют частное решение неоднородного ур-я.

В ряде случаев бывает удобно искать частное решение ур-я (I) не по общей схеме, а методом неопред. коэф-ов.

Это происходит в случае специального вида правой части $f(x)$

уравнения (I).

§ Случай неоднородных линейных дифференц. уравнений с правой частью специального вида.

∀ уравнение

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x) \qquad (*)$$

в случае, когда

$f(x) = P(x)e^{rx}$,

где $P(x)$ - полином,

а r - не есть корень характеристич. ур-я

$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0$, (**) -

($p_1, p_2, \ldots, p_n$ - постоянные).

Будем искать частное решение неоднор. ур-я (*) в виде:

$y = P_1(x)e^{rx}$, где (б)

$P_1(x)$ – полином той же степени, что и $P(x)$.

Поиск коэф-ов полинома $P_1(x)$ осуществляется путем подстановки предпол-я (0) в исходн. ур-е (*).

В случае, когда "r" является корнем характер. полинома (решением ур-я (**))

кратности s
нужно искать частное
решение в виде
$$y(x) = x^s \cdot P_1(x) e^{2x}$$

Комментарий

$$(D-2)^s \underbrace{\left(x^s P_1(x) e^{2x}\right)}_{y_*(x)} =$$

$$= \underbrace{e^{2x} e^{-2x}}_{I} (D-2)^s \left(x^s P_1(x) e^{2x}\right) =$$

$$= e^{2x} D^s \left(e^{-2x} x^s P(x) e^{2x}\right) =$$

$= e^{2x}\tilde{P}(x)$, где

$\tilde{P}(x)$ и $P(x)$ - полиномы одной степени.

] правая часть уравнения (*) имеет вид:

$$f(x) = e^{2x}\left[P(x)\cos(Lx) + Q(x)\sin(Lx)\right], \quad (***)$$

$(2 \pm iL)$ - не корни уравнения (**).

Тогда частное решение уравнения (*) нужно искать в виде:

$$\boxed{y = e^{2x}\left[P_1(x)\cos(Lx) + Q_1(x)\sin(Lx)\right],} \quad (\#)$$

где степени полиномов P_1 и Q_1 нужно брать равными наибольшей из степеней полиномов P и Q.

Если же $(2 \pm iL)$ — корни характер.

полинома (ур-я (**)) кратности S, то, как и раньше, нужно к представлению (#) добавить множитель x^s.