Лекция 28.09.21

Криволинейные и поверхностные интегралы.

§1. Криволинейный интеграл 1-го рода.

Пусть имеются кривые на пл-ти $\mathbb{R}^2$ в пр-ве.

1) $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$

$y(x)$ - ф-я одной

переменной.

def Кривой на плоскости называется отображение γ:

$$[t_0, t_1] \to \mathbb{R}^2;$$

$\Leftarrow$ отображение

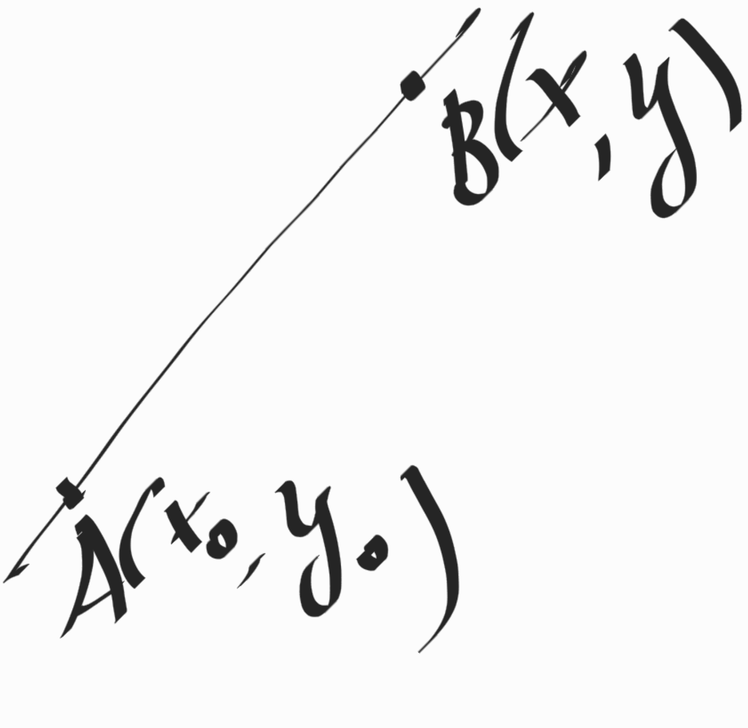
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [t_0, t_1]$$

(Параметрическое задание кривой.)

def Если функции $x(t)$, $y(t)$ дифференцируемы, то отображение дифференцируемо.

Пример 1: (прямая на плоскости)

$t \in \mathbb{R}$



$$\begin{cases} x = mt + x_0, \\ y = lt + y_0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{\tau}\, t + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$\vec{\tau}$ - касательный вектор

$$\vec{\tau} = \begin{pmatrix} m \\ l \end{pmatrix}.$$

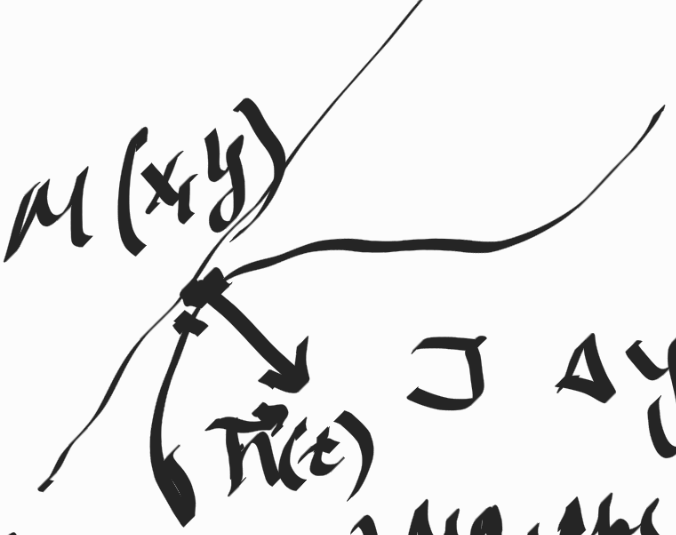
Перепишем ур-е (1):

$$\vec{r} = \vec{\tau} t + \vec{r_0}, \text{ где}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \vec{r_0} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

2) Для произвольной кривой на плоскости введем;

$$\Delta y \equiv y - y_0, \quad \Delta x \equiv x - x_0$$



$\exists\ \Delta y, \Delta x$ малы

$$\begin{cases} \Delta y = y'(t)\Delta t, \\ \Delta x = x'(t)\Delta t \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta y \\ \Delta x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} \Delta t$$

$$\parallel$$

$\vec{\tau}(t)$ – касательный вектор.

$\exists$ вектор нормали

$\underline{\vec{n}(t)}$:

$$\underline{\langle \vec{n}, \vec{\tau} \rangle = 0}, \quad (2)$$

где

$$\vec{\tau} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}$$

Из ур-я (2) следует:

$$x' n_x + y' n_y = 0 \quad (3)$$

Вектор нормали содержит две компоненты,

уравнение (2), определяющее нормаль, единственно.

Устраним имеющуюся двойственность:

Пусть $n_x = 1$, тогда

$$n_y(t) = -\frac{x'(t)}{y'(t)}$$ из (3).

Т.о. вектор нормали имеет вид:

$$\vec{n}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{x'(t)}{y'(t)} \end{pmatrix};$$

Пример 2:

(окружность на пл-ти);

$$x^2+y^2=R^2 \qquad (4)$$

Введем полярные координаты

$$\begin{cases} x = 2\cos\varphi, \\ y = 2\sin \end{cases}$$

из уравнения (4):

$r = R$ (5)

Ур-е — ур-е связи параметров r и φ.

Т.о. параметризация кривой принимает вид:

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi, \\ y = R\sin\varphi, \end{cases}$$

где $\varphi \in [0, 2\pi)$.

3) Определить параметризацию кривой на пл-ти,

заданной уравнением:

$$x^2-y^2=(x^2+y^2)^2, \quad (6)$$

Решение:

введем полярные координаты на пл-ти

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi, \end{cases}$$

$\varphi\in[0,2\pi)$,

$r\geq 0$.

Ур-е (6) принимает вид:

$$r^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)=r^4$$

$$r^2 = \cos 2\varphi \qquad (7)$$

$$2\varphi \in [0, 4\pi) - \frac{\pi}{2}$$

$$\left\{ [-\frac{\pi}{2}, \frac{7}{2}\pi) \right\}$$

Из ур-я (7) следует

$$2\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \cup [2\pi - \frac{\pi}{2}, 2\pi + \frac{\pi}{2}].$$

т.о. $\qquad (7')$

$$\varphi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi].$$

Из (7): $r=\sqrt{\cos 2\varphi}$,

$$\begin{cases} x=\sqrt{\cos 2\varphi}\,\cos\varphi, \\ y=\sqrt{\cos 2\varphi}\,\sin\varphi. \end{cases} \quad (8).$$

<u>Определим вид кривой</u>

$x'(\varphi)=0$ (ищем экстремум ф-ии $x(\varphi)$).

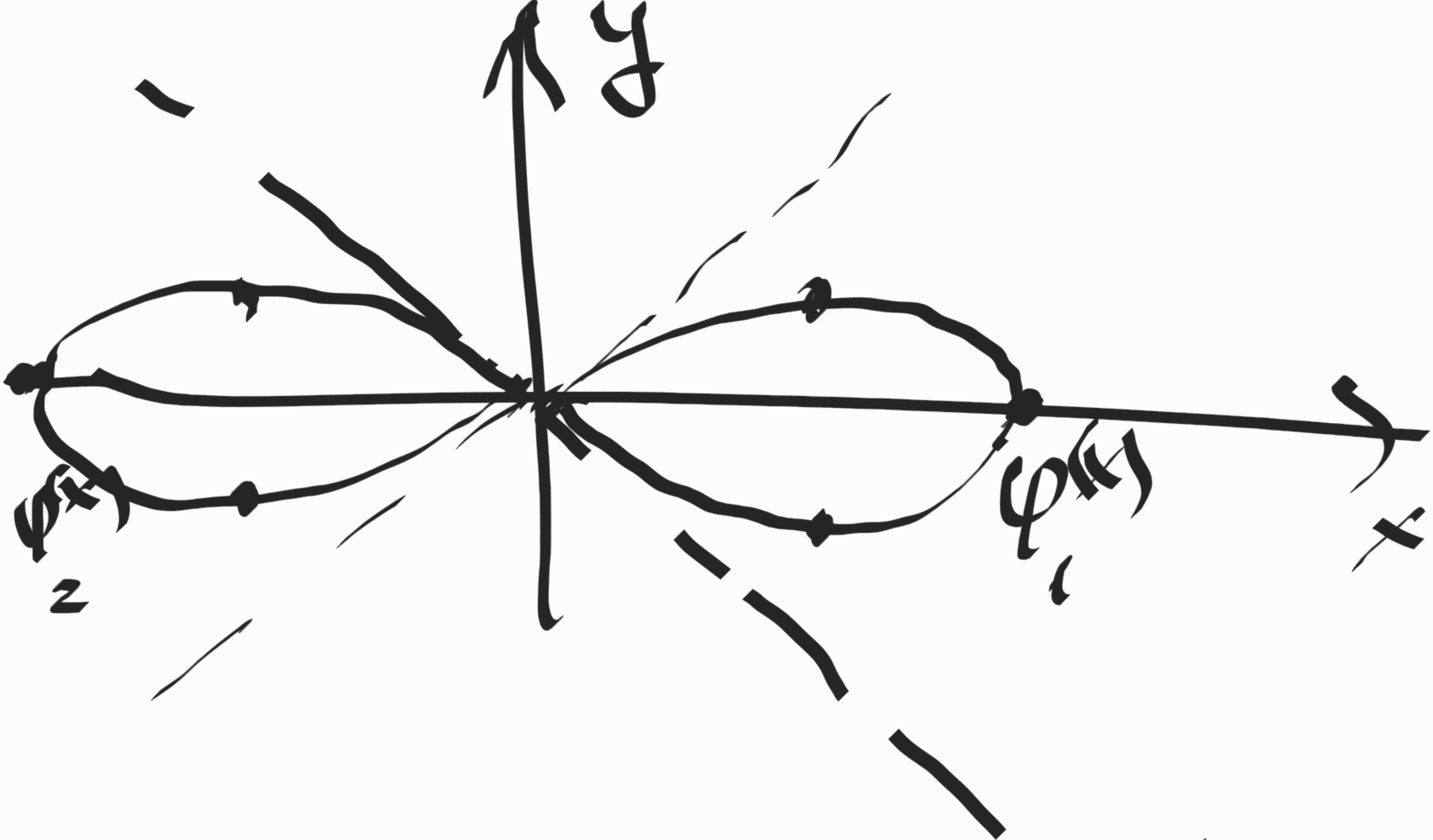
$$-\frac{1}{2}\frac{2\sin 2\varphi}{\cos^{1/2}2\varphi}\cos\varphi-\cos^{1/2}2\varphi\,\sin\varphi=0$$

$$\frac{1}{\cos^{1/2}2\varphi}\sin 3\varphi=0.$$

$$\begin{cases} 2\varphi \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, & m \in \mathbb{Z} \\ 3\varphi = \pi k, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\varphi = \frac{\pi k}{3}$$

$$\begin{cases} \varphi_1^{(x)} = 0 \quad (k=0) \\ k = 1, 2 \text{ не соотв-ют области опред-я } \varphi \ (z') . \\ \varphi_2^{(x)} = \pi \quad (k=3) \end{cases}$$

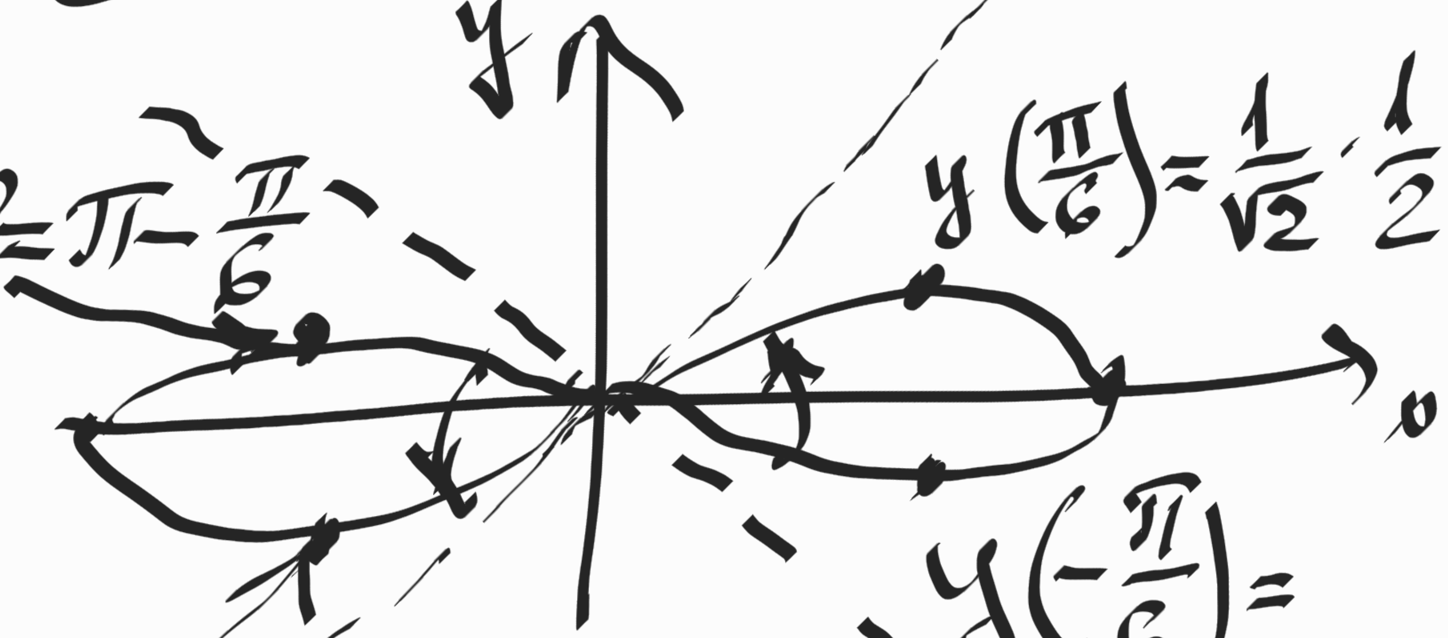


Ищем точки экстр-ма по φ:

$$y'(\varphi) = \frac{1}{\cos^{1/2} 2\varphi} \cos 3\varphi = 0$$

$$\begin{cases} 3\varphi = \frac{\pi}{2} + \pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ 2\varphi \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, & m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}, \quad k\in\mathbb{Z} \\ \varphi \ne \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}m, \quad m\in\mathbb{Z}\end{cases}$$



$\varphi = \pi - \frac{\pi}{6}$

$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}$

$y\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\varphi = \pi + \frac{\pi}{6}$

$$x\left(-\frac{\pi}{6}\right) = x\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Пример 4:

определить параметризацию кривой в

пространстве $\mathbb{R}^3$:

$$
\begin{cases}
x^2+y^2+z^2=R^2 & (10) \\
x+y+z=0 & (11)
\end{cases}
$$

кривая возникает как пересечение сферы и плоскости.

<u>Решение</u>:

1) ~~вв~~ введем сферич. с-му коорд-т

$$
\begin{cases}
x = r\sin\theta\cos\varphi \\
y = r\sin\theta\sin\varphi
\end{cases}
$$

$z = r\cos\theta$

из ур-я (10) ; $r^2 = R^2$

$r = R$.

из (11):

$$R\left(\sin\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi + \cos\theta\right) = 0$$

$$\sin\theta\left(\cos\varphi + \sin\varphi\right) = -\cos\theta$$

$$\operatorname{tg}\theta = -\frac{\sqrt{2}/2}{\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi}}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}/2}{\sin\left(\varphi + \pi/4\right)}\,; \qquad (12)$$

Нам нужно параметризовать кривую в пр-ве $\mathbb{R}^3$ углом φ:

$$\begin{cases} \sin\theta = f_1(\varphi) \\ \cos\theta = f_2(\varphi) \end{cases} ?$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x = x(\varphi) \\ y = y(\varphi) \\ z = z(\varphi) \end{cases} \quad ! \quad (\text{цель}).$$

Поскольку

$$\cos\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\theta}} \overset{(12)}{=}$$

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{1+\sin 2\varphi}}} \ominus$$

$$\left\{\begin{array}{l} \pm\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\theta}} = \\ = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+\frac{1}{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi+2\sin\varphi\cos\varphi}}} \\ = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+\frac{1}{1+\sin 2\varphi}}} \end{array}\right.$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1+\sin 2\varphi}{2+\sin 2\varphi}}\,; \qquad (13)$$

$$\sin\theta = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta} =$$

$$= \pm\sqrt{1-\frac{1+\sin 2\varphi}{2+\sin 2\varphi}} =$$

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{2+\sin 2\varphi}}\,; \qquad (14)$$

Определим знаки соответствия θ и φ:

Поскольку

$$\operatorname{tg}\theta = -\frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi} = -\frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$

(сферич. с-ма коорд-т),

получаем:

1) Пусть $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ $(\operatorname{tg}\theta < 0)$

2) Пусть $\varphi \in \left(\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ $(\operatorname{tg}\theta > 0)$

Окончательно:

1) $\boxed{\varphi \in \left(\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right)} \Rightarrow$

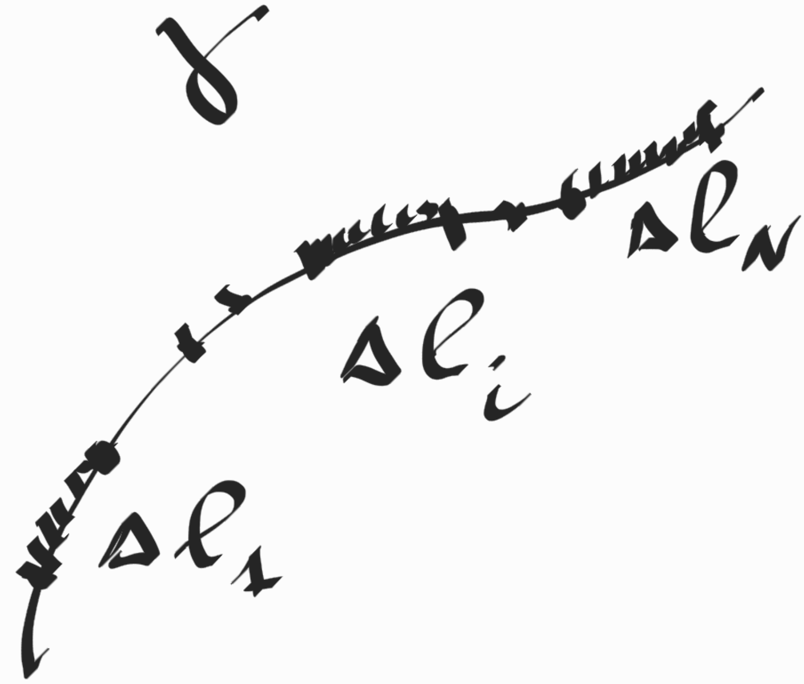
$$\begin{cases} x = R\dfrac{\cos\varphi}{\sqrt{2+\sin 2\varphi}}, \\ y = R\dfrac{\sin\varphi}{\sqrt{2+\sin 2\varphi}}, \\ z = R\sqrt{\dfrac{1+\sin 2\varphi}{2+\sin 2\varphi}}. \end{cases}$$

2) $\underline{\varphi \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right) \Rightarrow}$

$$\begin{cases} x = R\dfrac{\cos\varphi}{\sqrt{2+\sin 2\varphi}}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = R\dfrac{\sin\varphi}{\sqrt{2+\sin^2\varphi}}, \\ z = -R\sqrt{\dfrac{1+\sin^2\varphi}{2+\sin^2\varphi}}. \end{cases}$$

§2 Длина кривой



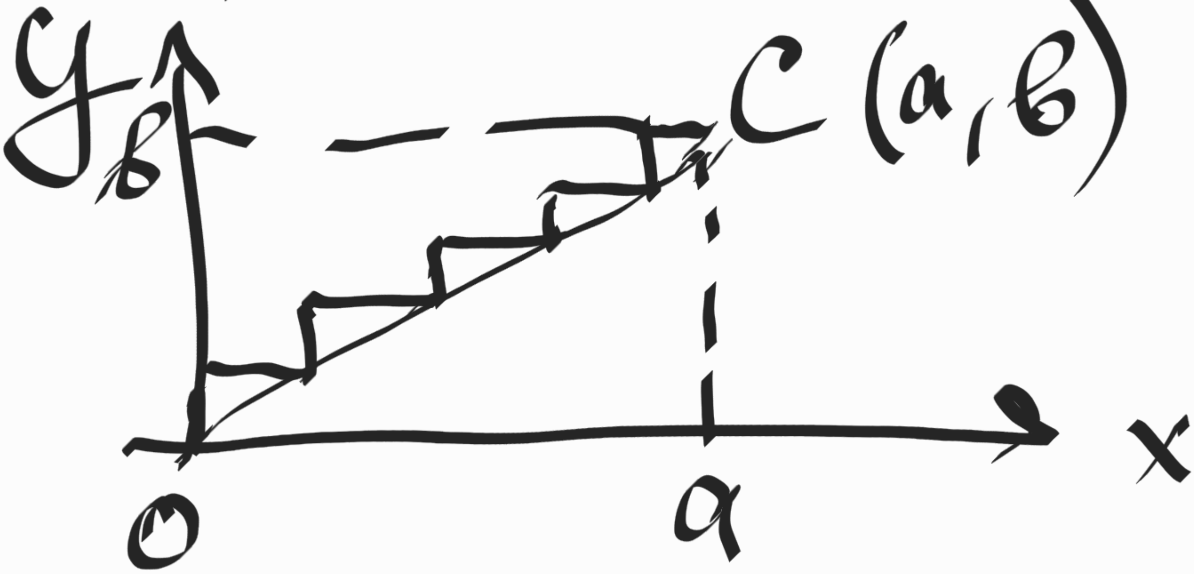
$$+\sum_{i=1}^{N} \Delta l_i$$

def Если ∃ предел

$$\lim_{\substack{\max \Delta l_i \to 0 \\ N \to \infty}} \sum_{i=1}^{N} \Delta l_i = l,$$

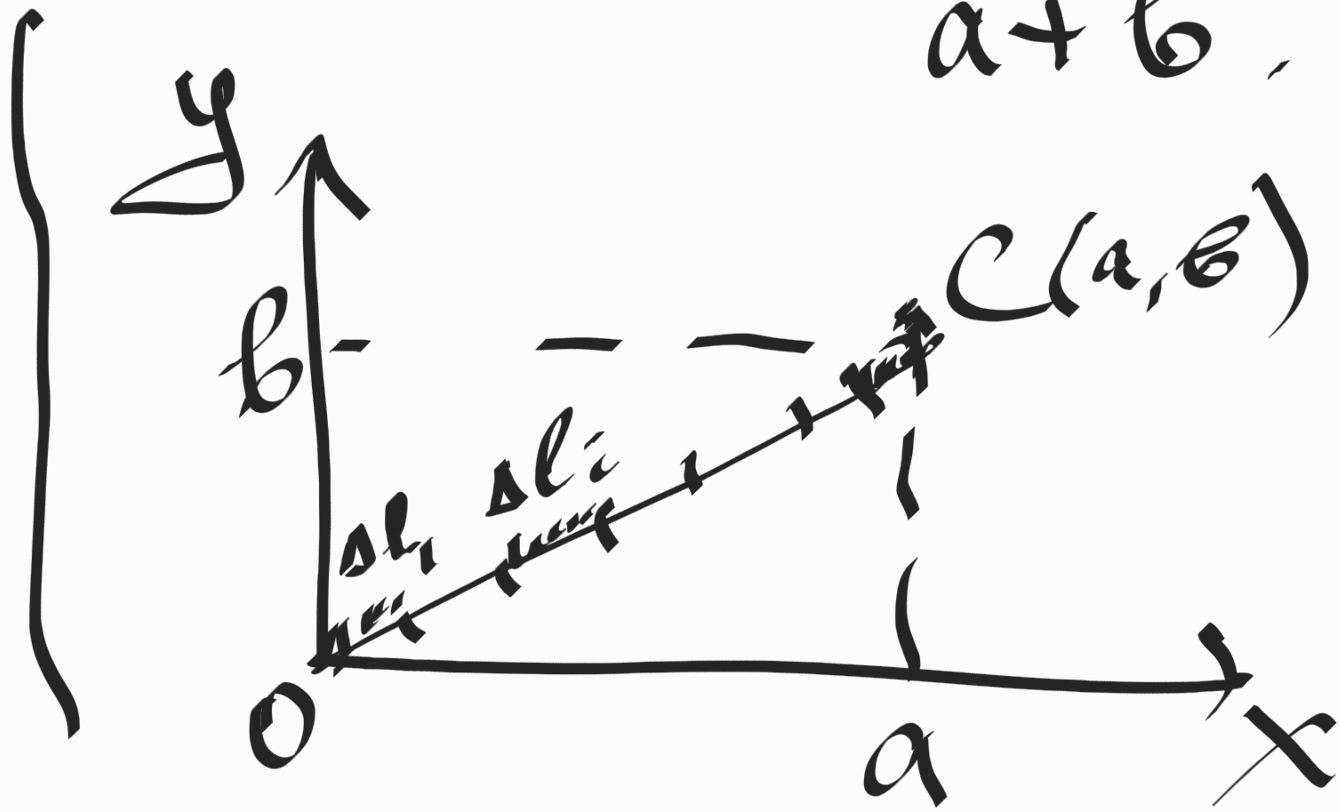
то кривая γ называется спрямляемой, а l — длина γ.

Пример:



$$A \equiv \sum_{i=1}^{N} \Delta l_i = \cancel{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$a+b.$$



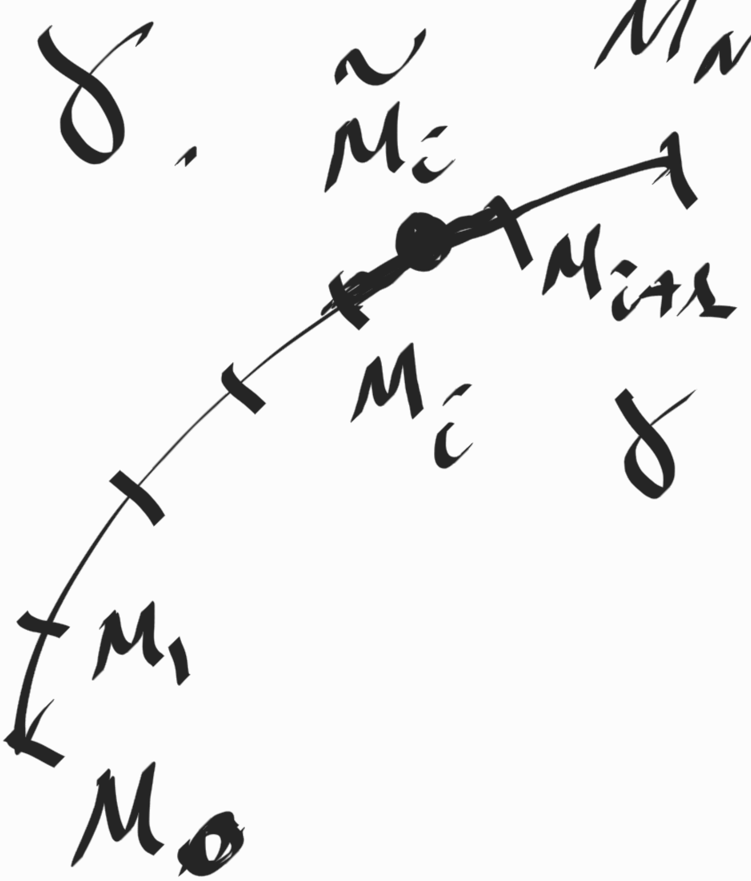
$$B = \lim_{\substack{\max \Delta l_i \to 0 \\ N \to \infty}} \sum_{i=1}^{N} \Delta l_i = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$A \neq B$$

§3 Криволинейный интеграл 1-го рода.

$\forall \gamma \subset \mathbb{R}^2$

$\exists f$ - функция, заданная в точках γ.



$\exists \sigma \{M_0, M_1, M_2, \dots, M_N\}$ (разбиение кривой γ).

$\forall\ \tilde{M}_i \in \overset{\frown}{M_i, M_{i+1}}$.

Тогда

$$S_N = \sum_{i=0}^{N-1} f(\tilde{M}_i)\,|M_i M_{i+1}|$$

— интегральная сумма.