Лекция 22.09.21

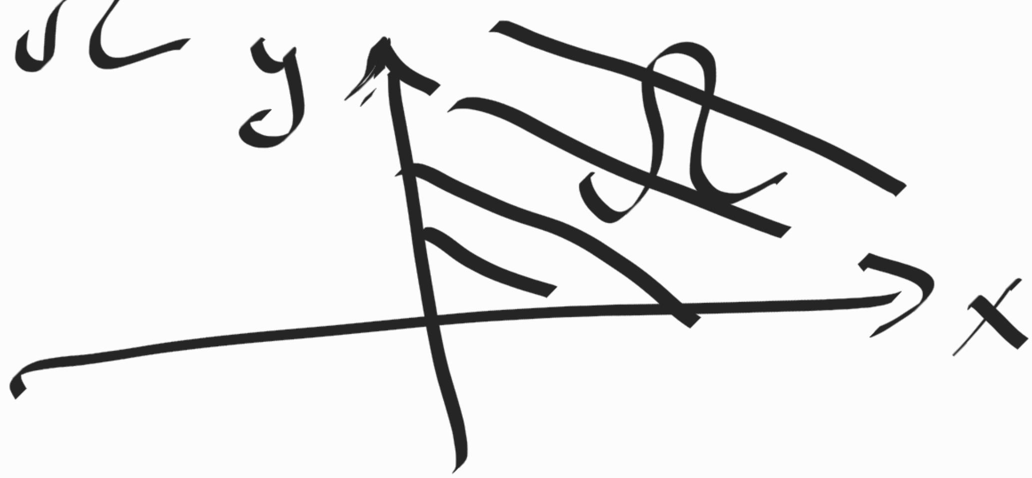
Вычисление интеграла Пуассона.

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

$$* \quad I^2 = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \int_0^\infty e^{-y^2}\,dy =$$

$$= \iint dx\,dy\; e^{-x^2-y^2} =$$

Ω



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, \quad \underline{r \geqslant 0,} \quad \underline{\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]}$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\infty} r\,dr\, e^{-r^2} = \quad \begin{cases} t = r^2 \\ dt = 2r\,dr \end{cases}$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{dt}{2} e^{-t} =$$

$$= \frac{\pi}{4} = \underline{I}^2$$

$$\underline{I} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Некоторые приложения Γ-функции и B-функции

def $\Gamma(x)=\int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt,$

$x>0$.

(Гамма-функция).

def

$B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt,$

$p>0,\ q>0$

Свойство:

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \qquad (*)$$

Доказ-во:

$$\ast\ \Gamma(q)\Gamma(p) =$$

$$= \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1}\,dx \int_0^\infty e^{-y} y^{q-1}\,dy =$$

$$= \iint e^{-x-y} x^{p-1} y^{q-1}\,dx\,dy =$$

$$\left(\begin{matrix} x>0 \\ y>0 \end{matrix}\right)$$

замена переменных

$$\begin{cases} x = uv \\ y = u(1-v) \end{cases} \quad \left(\begin{matrix} u>0, \\ 0<v<1 \end{matrix}\right)$$

Якобиан:

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} =$$

$$= -uv - u + uv = -u$$

$$= \int_0^1 dv \int_0^\infty du\, e^{-u} u^{p-1} v^{p-1} \cdot$$

$$\cdot u^{q-1} (1-v)^{q-1} \cdot u =$$

$$= \int_0^1 dv\, v^{p-1} (1-v)^{q-1} \cdot$$

$$\cdot \int_0^\infty du\, e^{-u} u^{p+q-1} =$$

$$= B(p,q)\,\Gamma(p+q) \blacksquare$$

Соотношение (*) доказано.

Рассмотрим интеграл:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^m x \sin^n x \, dx =$$

(здесь $m > 0$, $n > 0$)

$$\begin{cases} t = \sin^2 x, \quad dt = 2\sin x \cos x \, dx \\ \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 dt \, t^{\frac{n-1}{2}} (1-t)^{\frac{m-1}{2}} =$$

$$\begin{cases} \cos^{m-1} x = (1-t)^{\frac{1}{2}(m-1)} \\ \sin^{n-1} x = t^{\frac{1}{2}(n-1)} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{m+1}{2}\right) =$$

$$\left|\begin{array}{l} \frac{n-1}{2} = p-1 \Rightarrow p = \frac{n+1}{2} \\ \frac{m-1}{2} = q-1 \Rightarrow q = \frac{m+1}{2} \end{array}\right.$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}+1\right)};$$

Некоторые св-ва Г-функции

1) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

Д-во:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty dt\, e^{-t} t^{x-1},$$

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty dt\, e^{-t} t^{x} = -\int_0^\infty dt\, (e^{-t})' t^{x} =$$

$$= x \int_0^\infty dt\, e^{-t} t^{x-1} =$$

$$= x\, \Gamma(x) \quad \blacksquare$$

2) $\Gamma(1) = 1$

3) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

<u>Д-во</u>:

$$* \ \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \Big\{$$

$$= \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \int_0^{\pi/2} dt \sin^{2p-1} t \cos^{2q-1} t \Big|_{p=q=\frac{1}{2}} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2};$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \sin^m t \cos^n t = \frac{1}{2} B\Big(\underbrace{\frac{m+1}{2}}_{p}, \underbrace{\frac{n+1}{2}}_{q}\Big)}$$

$m = 2p-1$, $n = 2q-1$

$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi$

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ ∎

4) $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$

D-во: $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) =$

$= n(n-1)\,\Gamma(n-1) =$

$= n(n-1)(n-2) \cdots \cdots \underbrace{\Gamma(1)}_{1} =$

$= n!$ ∎

3) $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)=$

$$=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}\,;$$

<u>Пример</u>:

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{100}x\,dx=\frac{1}{2}B\left(\frac{100+1}{2},\frac{0+1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{101}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{101}{2}+\frac{1}{2}\right)}=$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(50+\frac{1}{2})}{\Gamma(51)} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{99!!}{2^{50}}\sqrt{\pi}\,\frac{1}{50!} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\,\frac{99!!}{100!!};$$

• Пример 2:

Вычислить интеграл:

$$J = \iint\limits_{(x^4+y^4\le 1)} (x^2+y^2)\,dx\,dy =$$

$$= 4 \iint\limits_{x^4+y^4\le 1,\ (x\ge 0,\ y\ge 0)} (x^2+y^2)\,dx\,dy =$$

$$\begin{cases} x = r\cos^{1/2}\varphi \\ y = r\sin^{1/2}\varphi \end{cases}$$

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos^{1/2}\varphi & \sin^{1/2}\varphi \\ -\frac{1}{2} r \cos^{-1/2}\varphi \sin\varphi & \frac{1}{2} r \sin^{-\frac{1}{2}}\varphi \cos\varphi \end{vmatrix} =$$

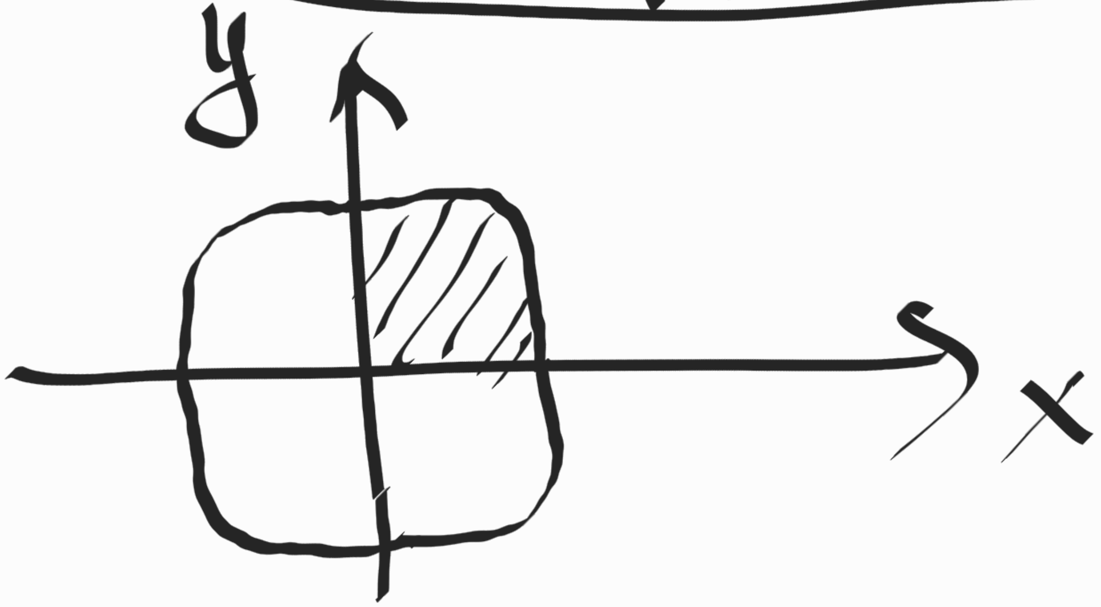
$$= \frac{r}{2}\cos^{3/2}\varphi \sin^{-1/2}\varphi + \frac{r}{2}\sin^{3/2}\varphi \cos^{-1/2}\varphi =$$

$$= \frac{r}{2}\cos^{-1/2}\varphi \sin^{-1/2}\varphi$$

$$\begin{cases} x = a r \cos^{\alpha}\varphi \\ y = b r \sin^{\alpha}\varphi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \alpha a b r \cos^{\alpha-1}\varphi \sin^{\alpha-1}\varphi$$

обобщ. полярные координаты



$$= 4\iint r^2(\cos\varphi+\sin\varphi)\frac{r}{2}\cos^{-1/2}\varphi \cdot$$

$$\left(r^4 \le 1,\ \varphi\in\left[0,\tfrac{\pi}{2}\right] \right)$$

$$\cdot \sin^{-1/2}\varphi \, dr\, d\varphi =$$

$$= 2\int_0^1 r^3\, dr \int_0^{\pi/2} d\varphi\,(\cos\varphi+\sin\varphi)\cdot$$

$$\cdot\left(\cos^{-1/2}\varphi \, \sin^{-1/2}\varphi\right) =$$

$$= \frac{2}{4}\left\{\int_0^{\pi/2} d\varphi \cos^{1/2}\varphi \, \sin^{-1/2}\varphi + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\pi/2} d\varphi \sin^{1/2}\varphi \, \cos^{-1/2}\varphi \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2} B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2} B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\, 2\, \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(1)} =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin \pi x} \\ \qquad 0 < x < 1 \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\pi \cdot \cancel{2}}{\sqrt{2}} =$$

$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}$;

<u>Пример</u>: найти объем области, ограниченной поверхностью:

$$(x^2+y^2)^2 + z^4 = x \quad (1)$$

<u>Решение</u>:

1) $x \geq 0$ (согласно ур-ю (1))

2) область инварианта относит-о замен:

$y \to -y$, $z \to -z$;

$$\Rightarrow V = \iiint\limits_V dx\,dy\,dz =$$

$$= 4\iiint dx\,dy\,dz = $$

$y \geq 0$, $z \geq 0$

$(x^2+y^2)^2+z^4 = x$ — ур-е границы области.

Введем новую систему координат:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi & r \geq 0, \\ y = r\sin\varphi & z \geq 0, \\ z = z & \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

$$= 4\iiint r\,dr\,d\varphi\,dz =$$

$| \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}] |$

$$\begin{cases} r \geq 0, \ z \geq 0 \\ r^4 + z^4 = r\cos\varphi \end{cases}$$

Новая замена переменных:

$$\begin{cases} r = u\cos^{1/2}\theta & u \geq 0, \\ z = u\sin^{1/2}\theta & \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ \varphi = \varphi & \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

$$= 4\iiint d\varphi \cdot \underbrace{u\cos^{1/2}\theta}_{r} \cdot$$

$$u^4 = u\cos^{1/2}\theta\cos\varphi$$

$$(\text{или} \quad u = \cos^{1/6}\theta\cos^{1/3}\varphi)$$

$$\cdot \underbrace{\frac{1}{2}u\cos^{-1/2}\theta\sin^{-1/2}\theta}_{"I"} \, d\theta \, du =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\cos^{1/6}\theta \cos^{1/3}\varphi} du\, u^2 \sin^{-1/2}\theta =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \cdot \sin^{-1/2}\theta \cdot \cos^{1/2}\theta \cos\varphi =$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{1}{2}\, B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(1)} =$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{3}\,\frac{2}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,\pi}{3},$$

Список литературы:

1) В. И. Смирнов "Курс высшей математики", т. 2, т. 4, ч. 1

2) Г. Е. Шилов "Математ. анализ. Функции нескольких вещественных переменных.

3) И. А. Виноградова и др. "Математический анализ в задачах и

упражнениях"

4) Г.Е. Шилов, "Математ. анализ. Функции одной вещественной переменной".

5) А.М. Будылин, "Методич. пособие по высшей математике в третьем семестре".