Лекция 20.10.21

Поверхностный интеграл 2-го рода.

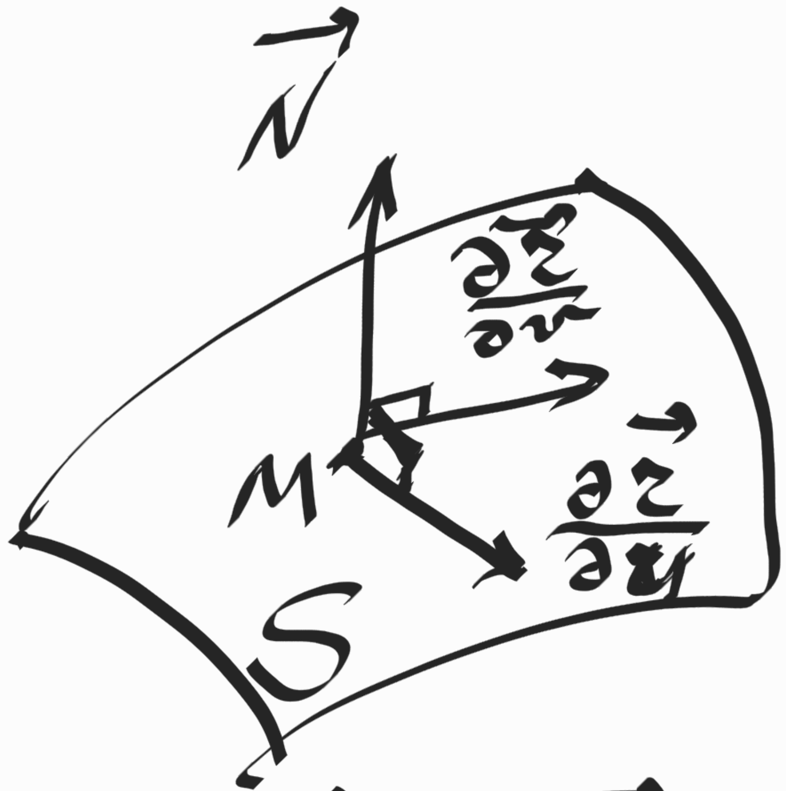
1. Нормаль к поверхности.

$$\exists\ \Theta : \underset{\subset \mathbb{R}^2}{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v), \end{cases} \quad (u,v) \in D \qquad (*)$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$\exists$ функции $x, y, z\ (*)$
$\in C^1(\mathcal{D})$



$$\ast\ \vec{N} = \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right] =$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} +$$

$$+ \hat{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{i} \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + \hat{j} \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + \Big\{$$

$$+\hat{k}\,\frac{D(x,y)}{D(u,v)} \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix}\text{вектор}\\ \text{нормали}\\ \vec{N}\ \text{к пов-ти}\ S\end{matrix}\right\}$$

$$(1)$$

<u>Пример</u>: $(x^2+y^2+z^2=R^2)$

1) <u>Нормаль к сфере</u>

$$\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\cos\theta \end{cases}$$

$\varphi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in [0, \pi]$.

<u>Тогда</u>:

$$\frac{D(y,z)}{D(\varphi,\theta)} =$$

$$= \begin{vmatrix} R\sin\theta\cos\varphi & 0 \\ R\cos\theta\sin\varphi & -R\sin\theta \end{vmatrix} =$$

$$= -R^2\sin^2\theta\cos\varphi;$$

(первая комп-а в-ра нормали $\vec{N}$).

$$\frac{D(z,x)}{D(\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial\varphi} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\theta} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -R\sin\theta\sin\varphi \\ -R\sin\theta & R\cos\theta\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= -R^2\sin^2\theta\sin\varphi;$$

(вторая компонента

в-ра нормали $\vec{n}$).

$$\frac{D(x,y)}{D(\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -R\sin\theta\sin\varphi & R\sin\theta\cos\varphi \\ R\cos\theta\cos\varphi & R\cos\theta\sin\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= -R^2\sin\theta\cos\theta.$$

(третья компонента в-ра нормали $\vec{n}$).

Подставим полученные выражения в ф-лу (1) и найдем вектор нормали $\vec{N}$ к сфере в $\forall$ её точке.

$$|\vec{N}| = R^2 \sin\theta$$

$$\hat{N} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\theta\sin\varphi \\ -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Случай явного задания поверхности:

$\exists\ z = f(x,y),\quad (x,y) \in D$

$\mathbb{R}^2$

$$\Theta: \begin{cases} x = x, \\ y = y, \\ z = f(x,y). \end{cases} \quad D \to \mathbb{R}^3 \quad (S)$$

Определим в-р нормали.

$$\frac{D(y,z)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} 0 & f_x(x,y) \\ 1 & f_y(x,y) \end{vmatrix} = -f_x(x,y),$$

$$\frac{D(z,x)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} f_x(x,y) & 1 \\ f_y(x,y) & 0 \end{vmatrix} = -f_y(x,y),$$

$$\frac{\mathcal{D}(x,y)}{\mathcal{D}(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Нормаль $\vec{N} = \begin{pmatrix} -f_x(x,y) \\ -f_y(x,y) \\ 1 \end{pmatrix}.$

<u>Пример</u>: определим нормаль к сфере радиуса R. (будем $\measuredangle$ полусферу $z \geq 0$).

<u>Решение</u>:

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$

$$(x, y) \in \{x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

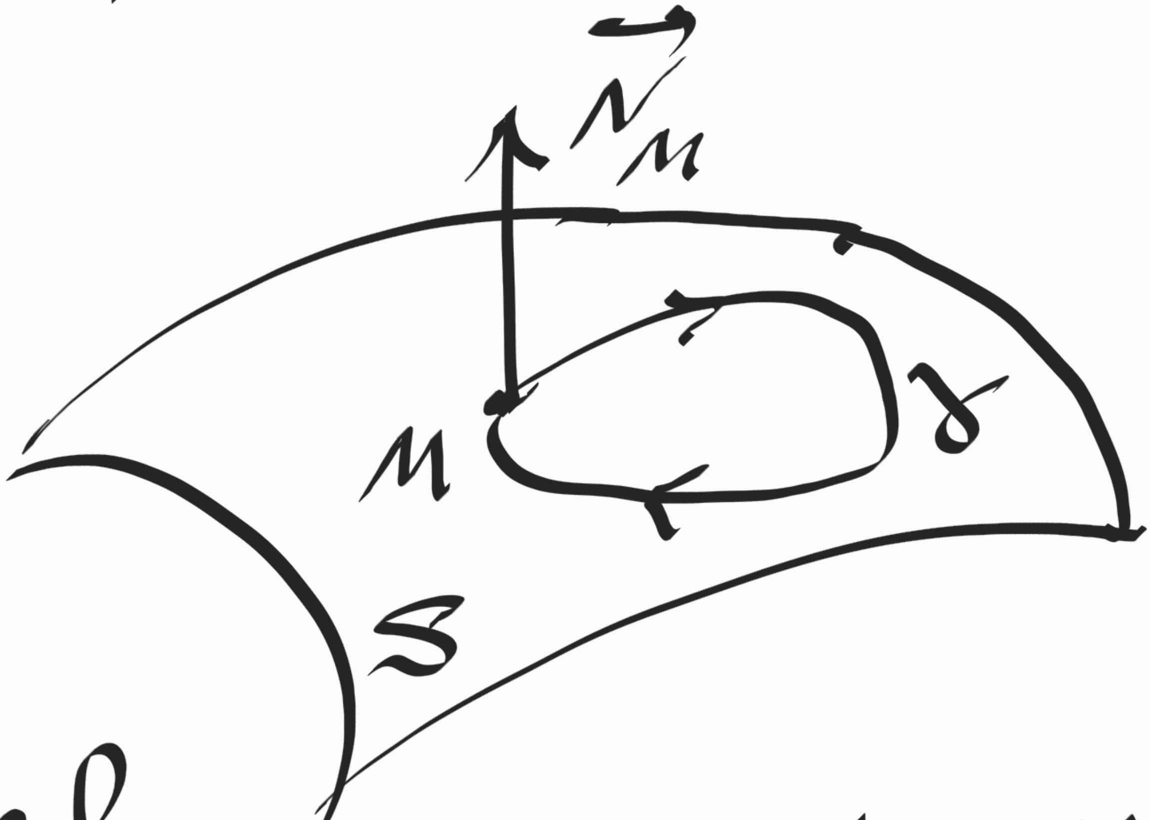
$$\vec{N} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \\ \dfrac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

§ Ориентация поверхностей.

] S - поверхность в R^3,

$M \in S$ - некоторая точка на поверхности.

Зададим нормаль $\vec{N}_M$ к поверхности S в точке M.



<u>def</u> если для $\forall$ (·) M и $\forall$ замкнутого пути γ на S (так что $M \in \gamma$)

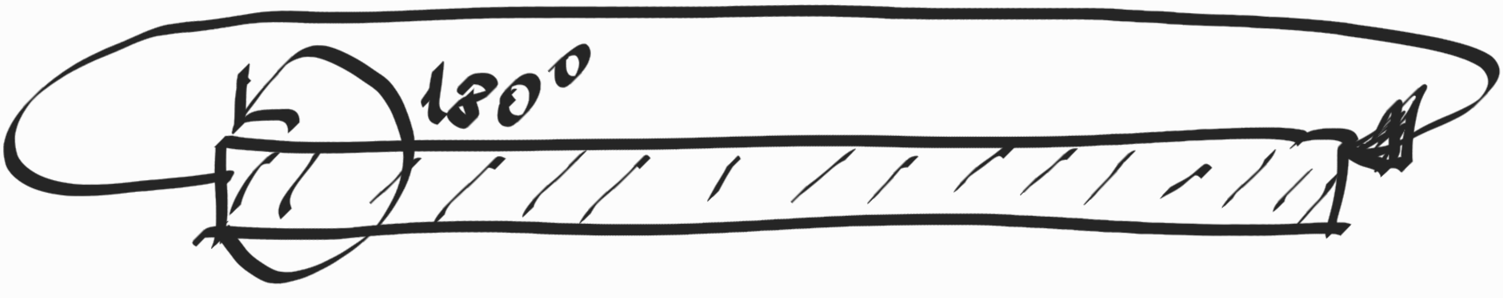
в результате обхода пути в направление нормали не меняется, то поверхность называется ориентируемой.

Примеры:

1) сфера - ориентируемая

2) лист Мебиуса не ориентируем.

склейка



Определение:

поверхность ориентируема, если в каждой (·) указано направление нормали, так что оно не меняется при обходе $\forall$ замкнутого пути γ на S.

§

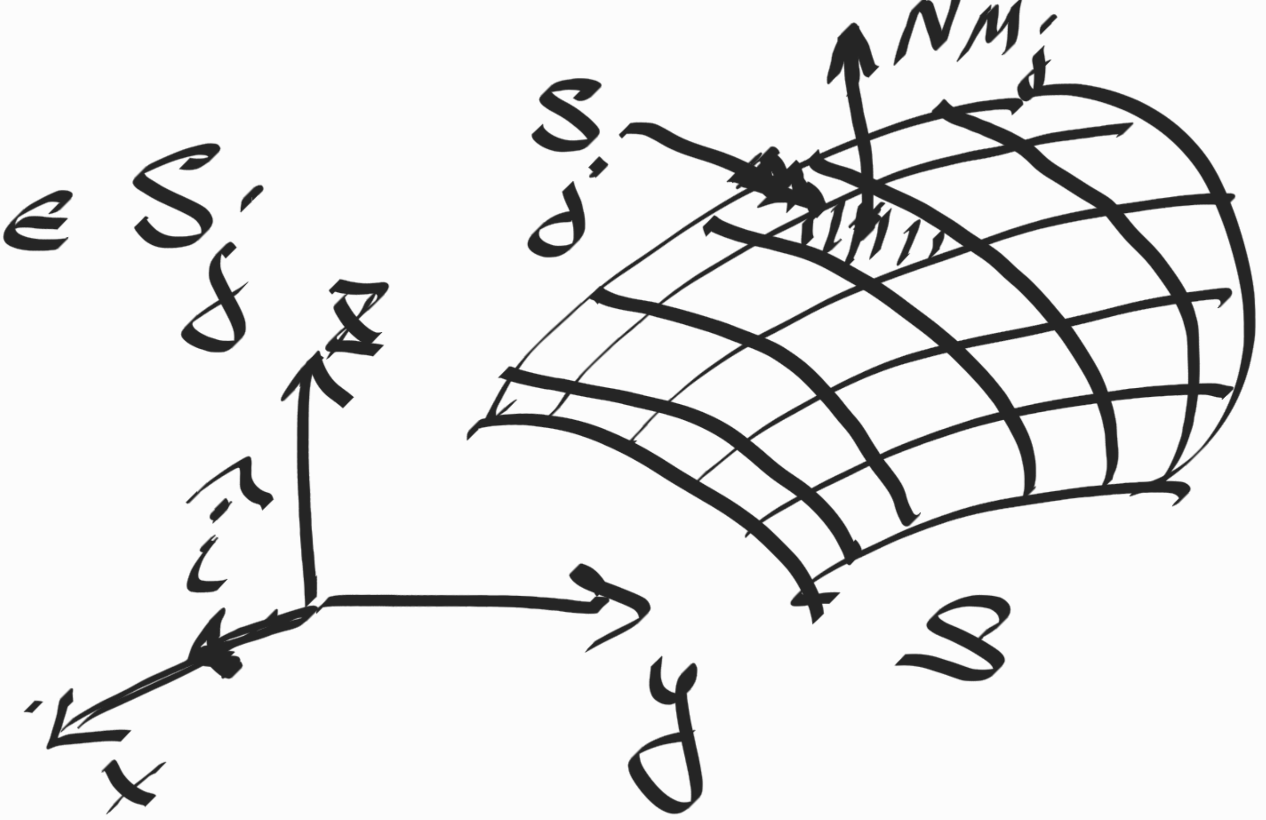
Определение поверхностного интеграла 2-го рода.

$\exists$ пов-ть S - ориентирована,

$\exists$ функция $P(x, y, z)$

задана на S,

$\exists$ S – дифференцируема



$M_j \in S_j$

$$A = \sum_{j=1}^{L} P(M_j)\, S(s_j) \cos(\vec{i}, \vec{N}_{M_j})$$

где $S(s_j)$ – площадь s_j

$\vec{N}_{M_j}$ – нормаль к пов-ти

S в точке M_j,

$\hat{i}$ - направление оси $\vec{OX}$.

$$I \;\exists \lim_{\substack{\max_j (\operatorname{diam}(S_j)) \to 0}} \sum_{j=1}^{L} P(M_j) S(S_j) \cos(\hat{i}, \vec{N}_{M_j}) =$$

$$= \iint_S P(x,y,z)\, dy\, dz$$

$$\hat{N} = \left(\cos(\hat{i}, \vec{N}_M), \cos(\hat{j}, \vec{N}_M), \cos(\hat{k}, \vec{N}_M) \right)^T$$

$$\cos(\hat{i}, \vec{N}_M)\, dS = \hat{N}_x\, dS =$$

$$= \hat{N}_x \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv =$$

(есть параметр-я пов-ти)

$$= \vec{N}_x \cdot |\vec{N}|\, du\, dv =$$

$$\left\{ \sqrt{EG - F^2} = |\vec{N}| = \left| \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right] \right| \right.$$

$$= N_x\, du\, dv = \underbrace{\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\, du\, dv}_{} =$$

$$= dy\, dz \quad \blacksquare$$

$$J = \underbrace{\iint_S dy\, dz}_{} = \iint_D \underbrace{\frac{D(y,z)}{D(u,v)}}_{} du\, dv$$

$(y, z) \to (u, v)$

$\left\{ y = y(u, v) \right.$ $\quad (u, v) \in D$

$z = z(u,v)$

Это определение можно распростр-ть на недифференц-ую пов-ть S, если до перехода к пределу площадь S_j заменить на площадь проекции S_j на касательную плоскость, проводящую к поверхности S в точке x_j.

$\exists$ тройку интегралов

$$\iint\limits_S P(x,y,z)\,dy\,dz,$$

$$\iint\limits_S Q(x,y,z)\,dz\,dx,$$

$$\iint\limits_S R(x,y,z)\,dx\,dy.$$

Здесь $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ определены на S.

$\exists$ также

$$J=\iint\limits_S P(x,y,z)\,dy\,dz+Q(x,y,z)\,dz\,dx+R(x,y,z)\,dx\,dy.$$

§ Свойства и физический смысл поверхностного интеграла второго рода

1) поверхностный интеграл 2-го рода зависит от ориентации пов-ти.

$\exists$ S_+ и S_- положительно и отрицательно ориентированная пов-ть S.

Тогда:

$$\iint\limits_{S_+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy =$$

$$= -\iint\limits_{S_-} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$$

2) <u>Связь между интегралами 1-го и 2-го рода.</u>

$$\iint\limits_{S} P\,dy\,dz = \lim_{\substack{L\to\infty \\ \lambda(\sigma)\to 0}} \sum_{j=1}^{L} P(M_j)\cdot \cos(\hat{i}, \vec{N}_{M_j})\, S(\sigma_j) =$$

$$= \iint\limits_{S} P(x,y,z)\, \hat{N}_x\, dS \; -$$

– поверхностный интеграл 1-го рода

Аналогично:

$$\iint_S Q\,dz\,dx = \iint_S Q(x,y,z)\,\hat{N}_y\,dS,$$

$$\iint_S R\,dx\,dy = \iint_S R(x,y,z)\,\hat{N}_z\,dS.$$

$\exists\ \vec{F} = (P, Q, R)^t$ — векторное поле.

Тогда:

$$\boxed{\iint_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint_S \langle \vec{F}, \hat{N} \rangle\,dS}$$

Свели пов-ый интеграл 2-го рода к пов-ому интегралу 1-го рода.