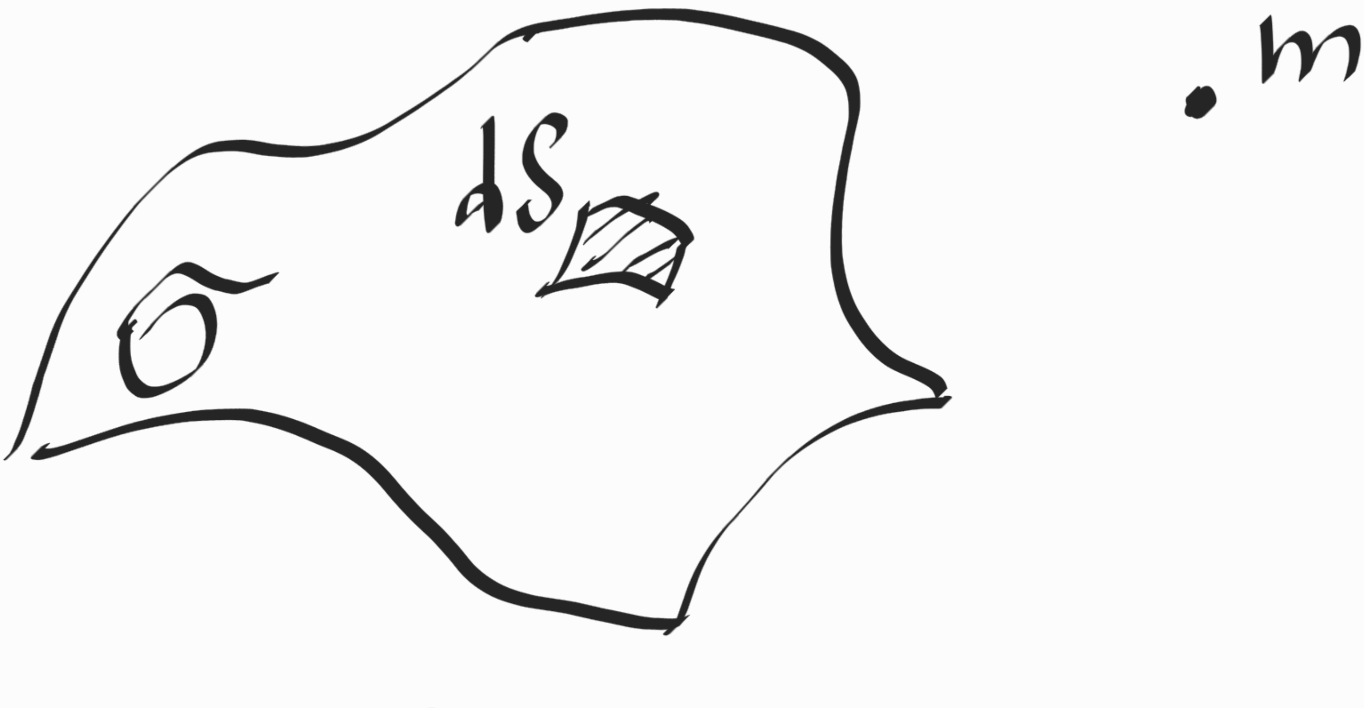
Лекция 19.10.21

Физический смысл поверхностного интеграла 1-го рода.



ρ – поверхностная плотность

Д силу, с которой плот-ть б притягивает матер. точку массы m.

m_2

(x, y, z)

m_1 (ξ, η, ζ)

$$\vec{F}_{m_2 m_1} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

$\frac{\vec{r}}{r}$ – един. в-р $\vec{r}$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x-\xi \\ y-\eta \\ z-\zeta \end{pmatrix}$$

$$d\vec{F}_{ds,\,m} = \gamma \frac{m}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r}\,\underbrace{\rho\, ds}_{dM}$$

$$F_x = \gamma m \iint\limits_{\sigma} \frac{x-\xi}{r^3}\,\rho\, ds$$

$$\left[\cos(\vec{r}, x) = \frac{x-\xi}{r}\right]$$

$$F_y = \gamma m \iint\limits_{\sigma} \frac{y-\eta}{r^3}\,\rho\, ds$$

$$\left[\cos(\vec{r}, y) = \frac{y-\eta}{r}\right]$$

$$F_z = \gamma m \iint\limits_{\sigma} \frac{z-\zeta}{r^3}\,\rho\, ds$$

$$\left[\cos(\vec{r}, z) = \frac{z-\zeta}{r}\right]$$

Определены все компоненты вектора силы (действующей со стороны пов-ти σ на матер. точку массы m).

Определим Ньютонов потенциал:

$$W = \iint\limits_{\sigma} \frac{1}{r}\rho(x,y,z)\,ds$$

Гравитац. потенциал, создаваемый поверхностью σ в точке (ξ, η, ζ)

$$\begin{cases} F_x = -\gamma m \dfrac{\partial W}{\partial \xi}, \\ F_y = -\gamma m \dfrac{\partial W}{\partial \eta}, \\ F_z = -\gamma m \dfrac{\partial W}{\partial \zeta}. \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{F} = -\gamma m \vec{\nabla} W} -$$

– сила, с которой

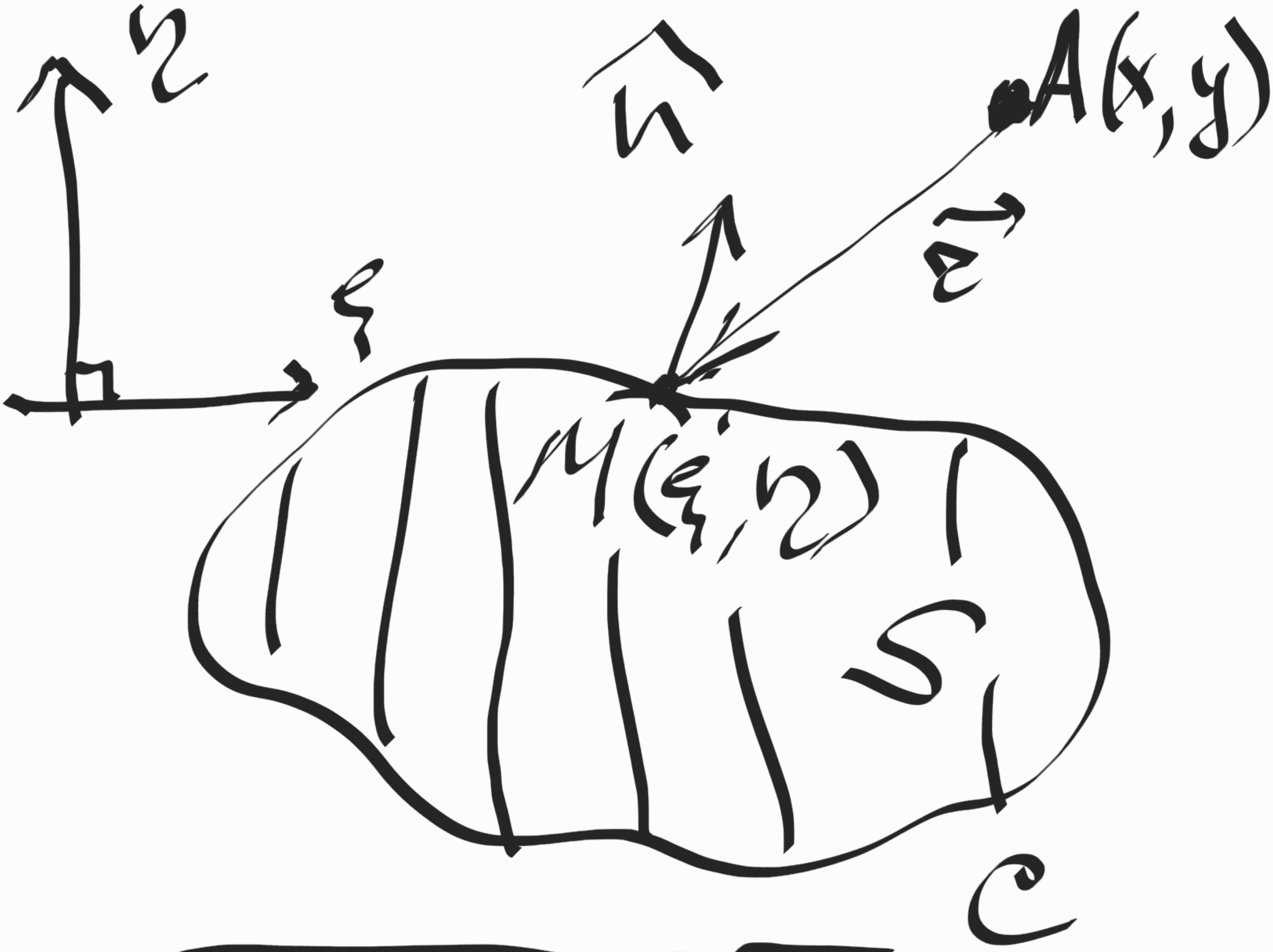
пов-ть σ притягивает мат. точку массы m.

Вычисление интеграла Гаусса.

Вычислить интеграл

$$u(x,y) = \oint\limits_C \frac{\cos(\hat{r}, \hat{n})}{r} \, dl$$

C - простой кусочно-гладкий контур, ограничивающий конечную обл-ть S.



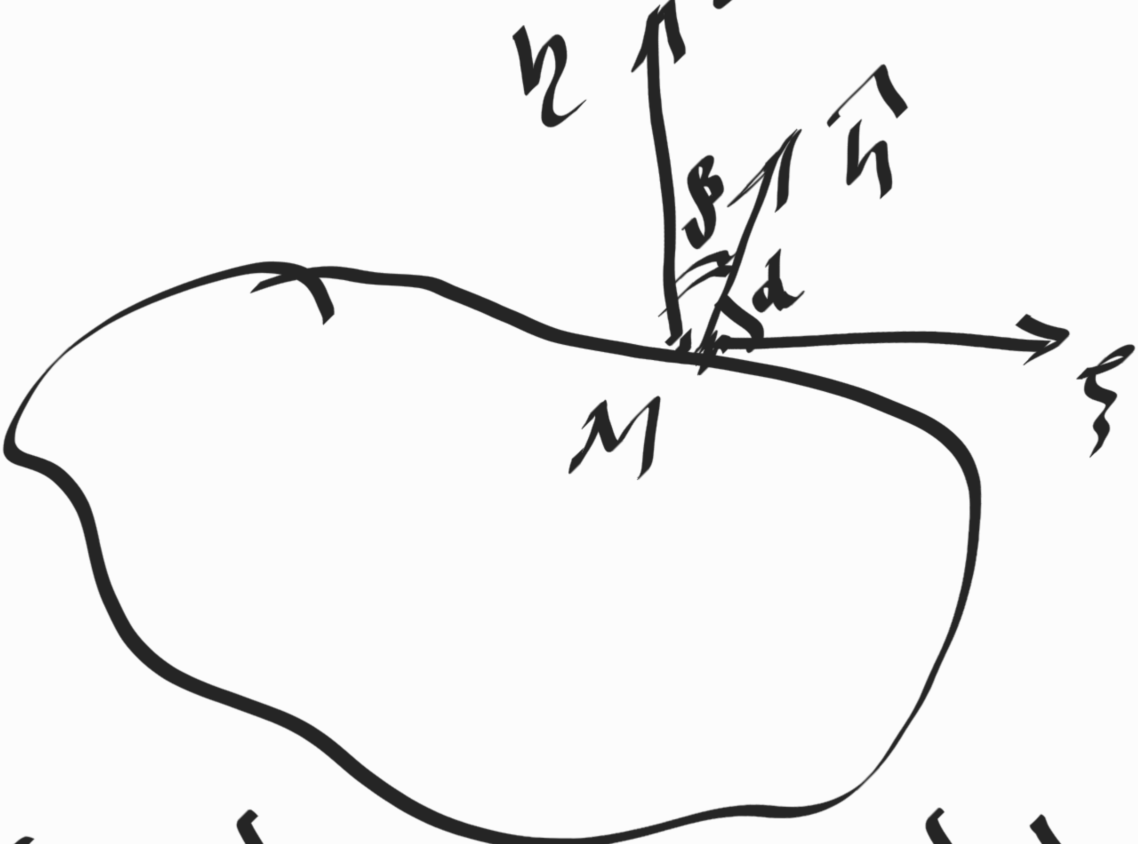
$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2};$$

$M \in C$

$\hat{n}$ – внешняя нормаль к контуру, проведенная в точке M.

Решение:

1) точка $A(x, y)$ лежит вне замкн. контура



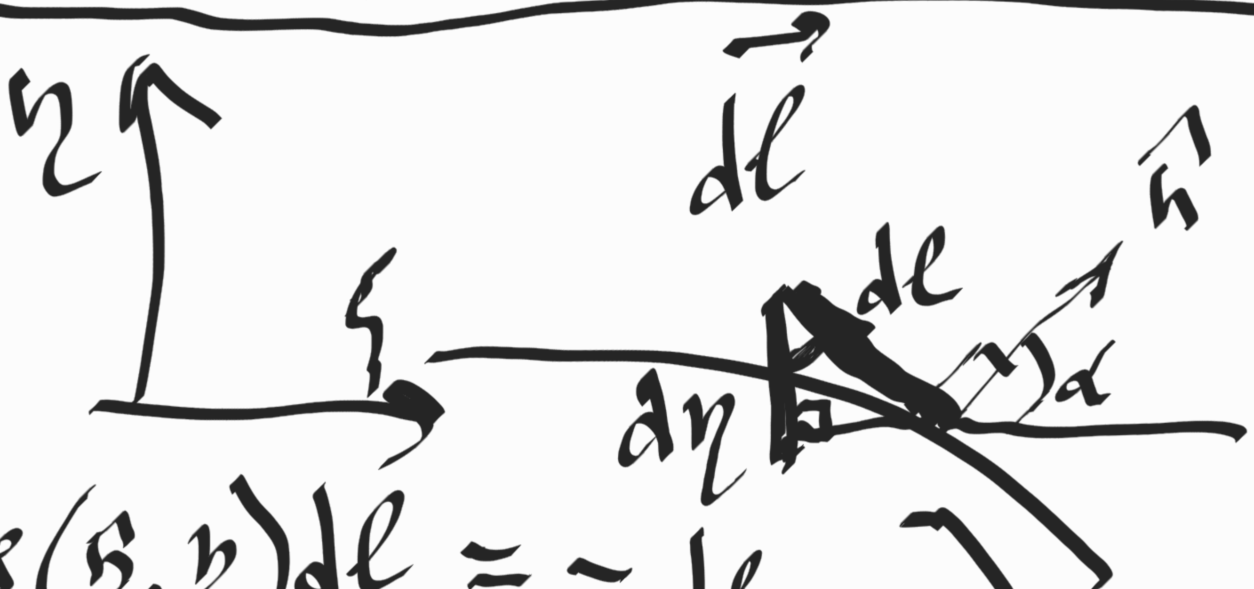
$$\hat{n} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\hat{n}, \xi) \\ \cos(\hat{n}, \eta) \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \xi - x \\ \eta - y \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \hat{r} = \begin{pmatrix} \dfrac{\xi - x}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}} \\[2ex] \dfrac{\eta - y}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Тогда:

$$u(x,y) = \oint\limits_C \frac{(\xi-x)\cos(\hat{n},\xi) + (\eta-y)\cos(\hat{n},\eta)}{r^2}\, dl$$

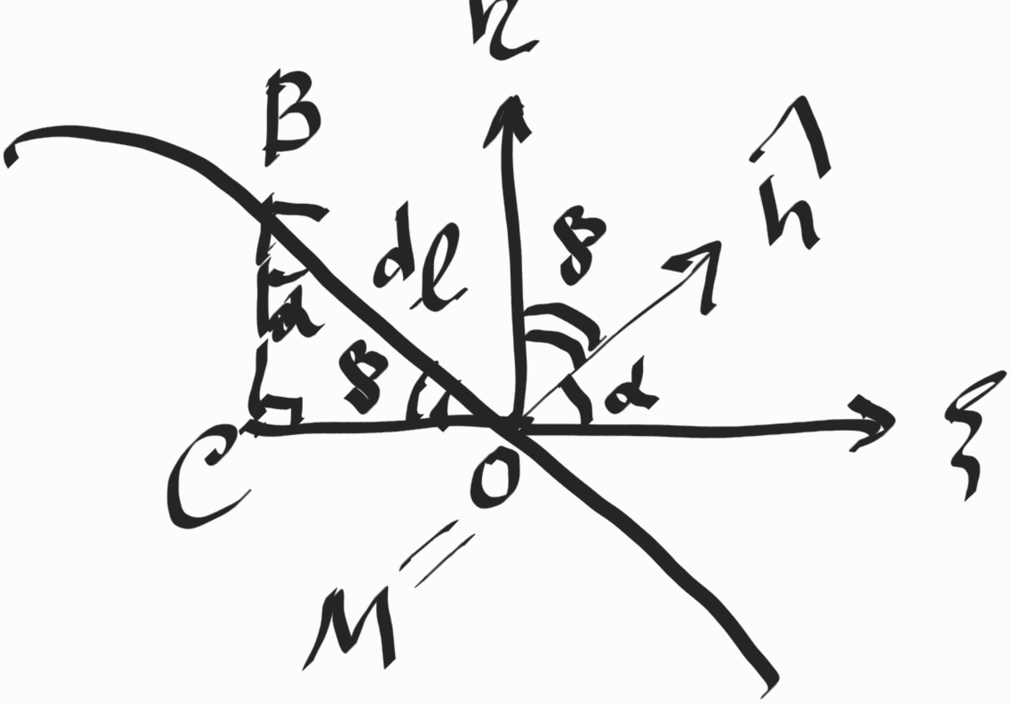


$$\left.\begin{aligned} \cos(\hat{n},\eta)\,dl &= -d\xi \\ \cos(\hat{n},\xi)\,dl &= d\eta \end{aligned}\right\}$$

$$\cos(\vec{r}, \hat{n}) = \frac{\overset{1\cdot 1\cdot \cos(\hat{r},\hat{n})}{\langle \vec{r}, \hat{n} \rangle}}{} =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\xi - x}{2} \\ \frac{\eta - y}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\hat{n}, \xi) \\ \cos(\hat{n}, \eta) \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= \underset{=}{\frac{\xi - x}{2}} \cos(\hat{n}, \xi) + \underset{=}{\frac{\eta - y}{2}} \cos(\hat{n}, \eta)$$



$$\left.\begin{aligned} &\cos(\widehat{n,\xi})\,dl = dl\cdot\cos\alpha = \\ &\quad = |BC| = d\eta \\ &\cos(\widehat{n,\eta})\,dl = dl\cos\beta = \\ &\quad = |OC| = -d\xi \end{aligned}\right\}$$

Тогда выражение (2) принимает вид:

$$u(x,y) = \oint_C \frac{(\xi - x)\,d\eta - (\eta - y)\,d\xi}{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} \qquad (3)$$

Для того, чтобы вост-ая ф-лой Грина, определим ф-ии

$$\begin{cases} P(\xi,\eta) = -\dfrac{\eta-y}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}, \\ Q(\xi,\eta) = \dfrac{\xi-x}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}. \end{cases}$$

В этих терминах (3) принимает вид:

$$u(x,y) = \iint\limits_{S} \left(\frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \eta}\right) d\xi\, d\eta. \quad (4)$$

0"

Определим:

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} = \frac{\left[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\right]-2(\xi-x)^2}{r^4} =$$

$$= \frac{(\eta-y)^2-(\xi-x)^2}{r^4};$$

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} = -\left\{\frac{\left[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\right]-2(\eta-y)^2}{r^4}\right\}$$

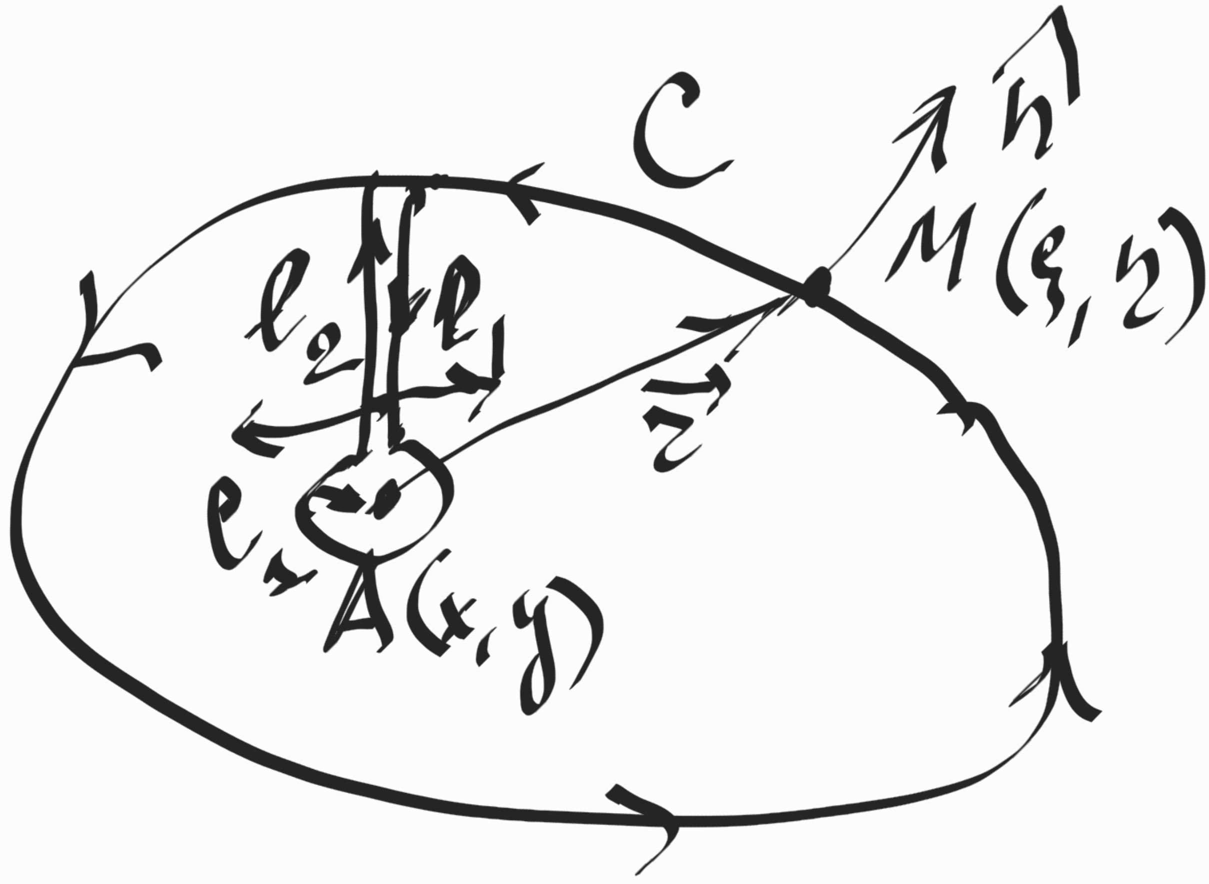
$$= \frac{(\eta-y)^2-(\xi-x)^2}{r^4} = \frac{\partial Q}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{\partial Q}{\partial \xi}$$

Т.о. $u(x,y) = 0$

(A лежит вне контура).

2) $\rbrack$ теперь (·) A лежит внутри контура



P, Q - непрер-ы на области S вместе с $\frac{\partial P}{\partial \eta}$, $\frac{\partial Q}{\partial \xi}$ вплоть до границы (ф-ла Грина)

$$\tilde{u}(x,y) = \oint\limits_{\tilde{C}} \frac{\cos(\hat{n},\hat{r})}{r}\, dl,$$

где $\tilde{C} = \underline{C} + \cancel{\underline{l_1}} + \cancel{\underline{l_2}} + \underline{C_1}$

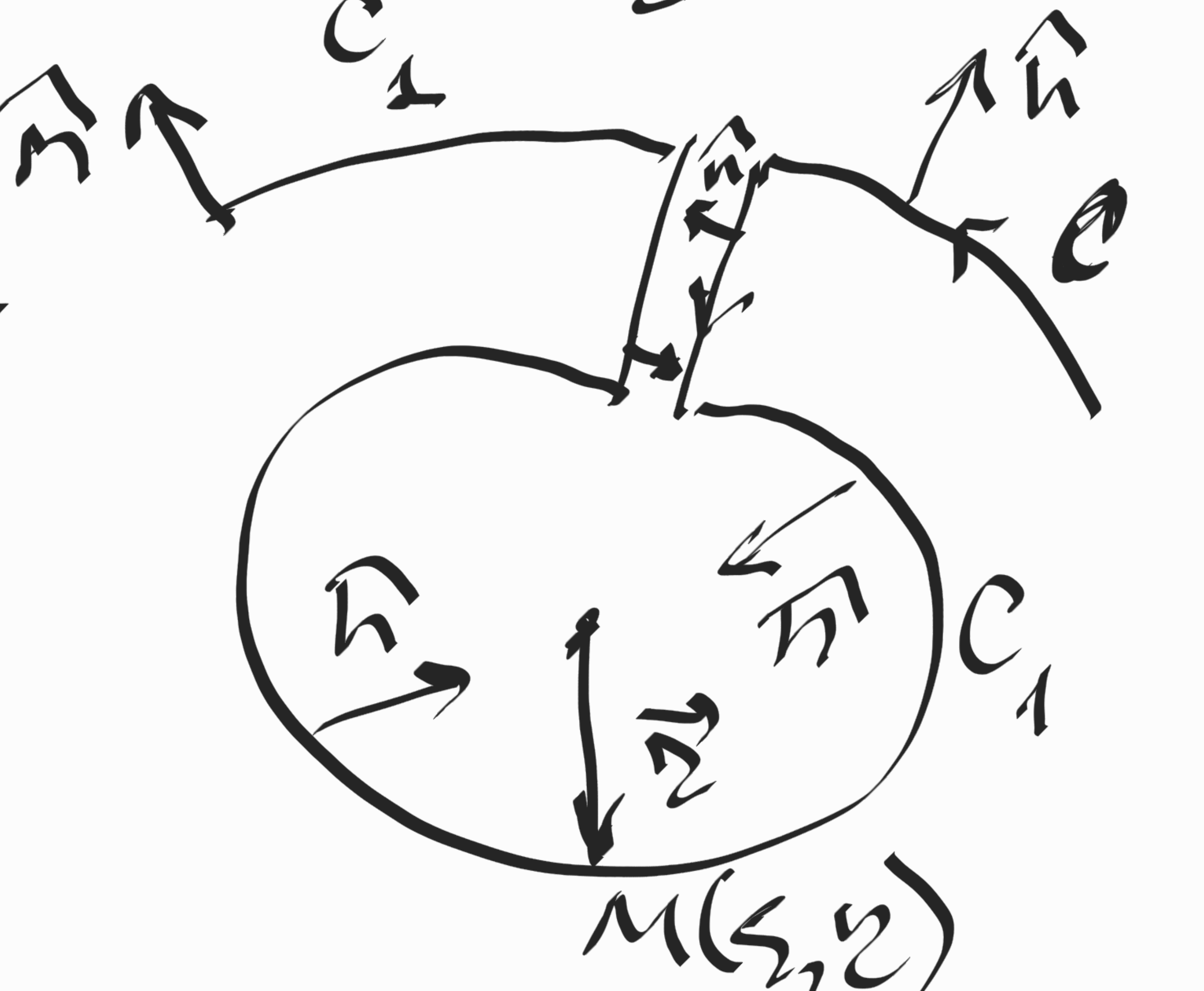
Тогда $\tilde{u}(x,y) = 0$

$$\oint\limits_{l_1 \cup l_2} \frac{\cos(\hat{n},\hat{r})}{r}\,dl = 0$$

$$\Rightarrow \oint\limits_{C}' \frac{\cos(\hat{n},\hat{r})}{r}\,dl = $$

$$= -\oint\limits_{C_1}' \frac{\cos(\hat{n},\hat{r})}{r}\,dl =$$

$$=$$



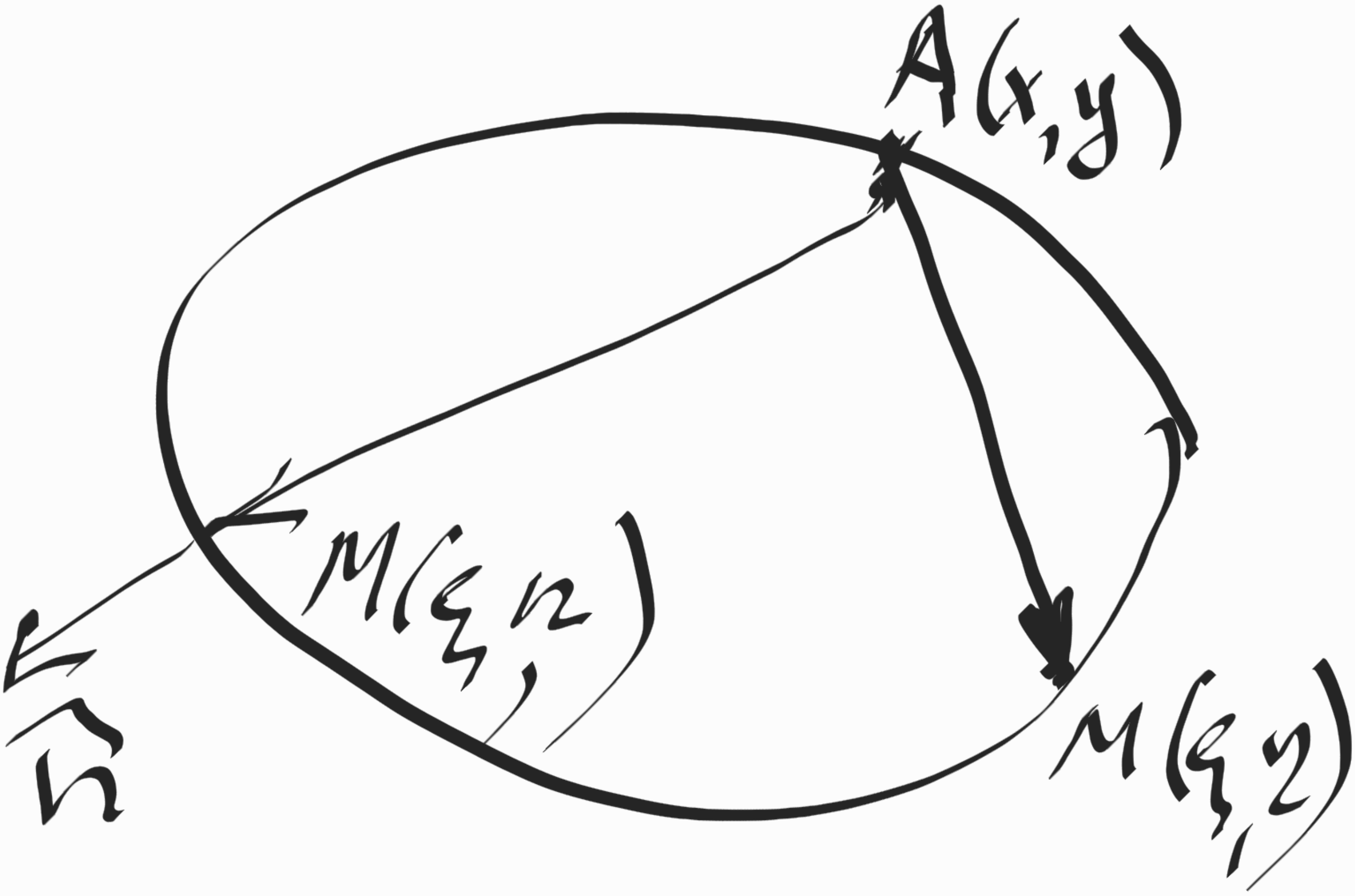
$$\cos(\hat{\vec{n}}, \hat{\vec{r}})\Big|_{C_1} = -1$$

$$= \oint_{C_1} \frac{dl}{\rho} = \frac{1}{\cancel{\rho}}\, 2\pi \cancel{\rho} = 2\pi$$

$$|\vec{r}|\Big|_{C_1} = \rho$$

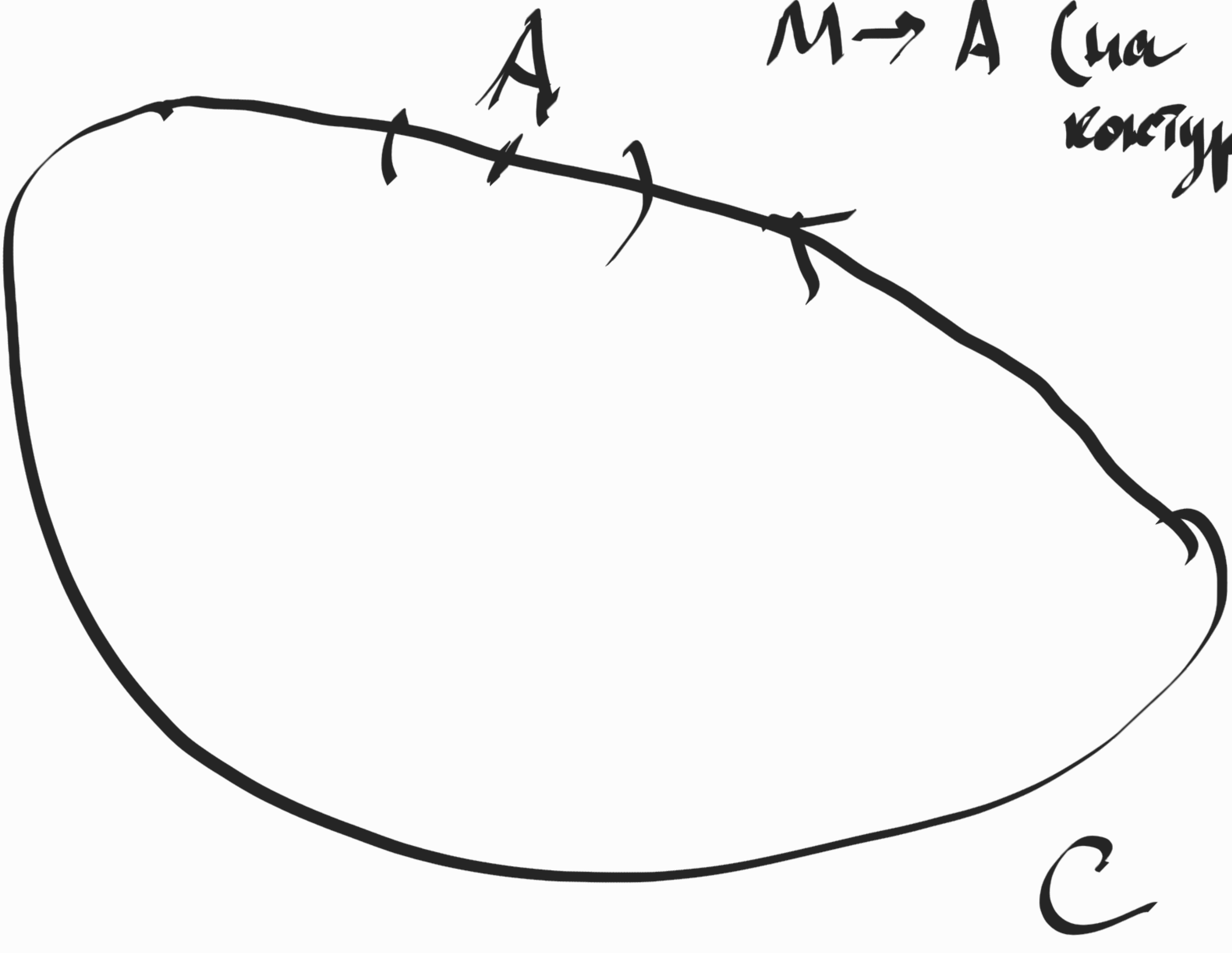
3) Точка $A(x,y) \in C$.

$$u(x,y) = \oint_C \frac{\cos(\hat{\vec{n}}, \hat{\vec{r}})}{r}\, dl$$



$r \longrightarrow 0$

$M \to A$ (на контуре)

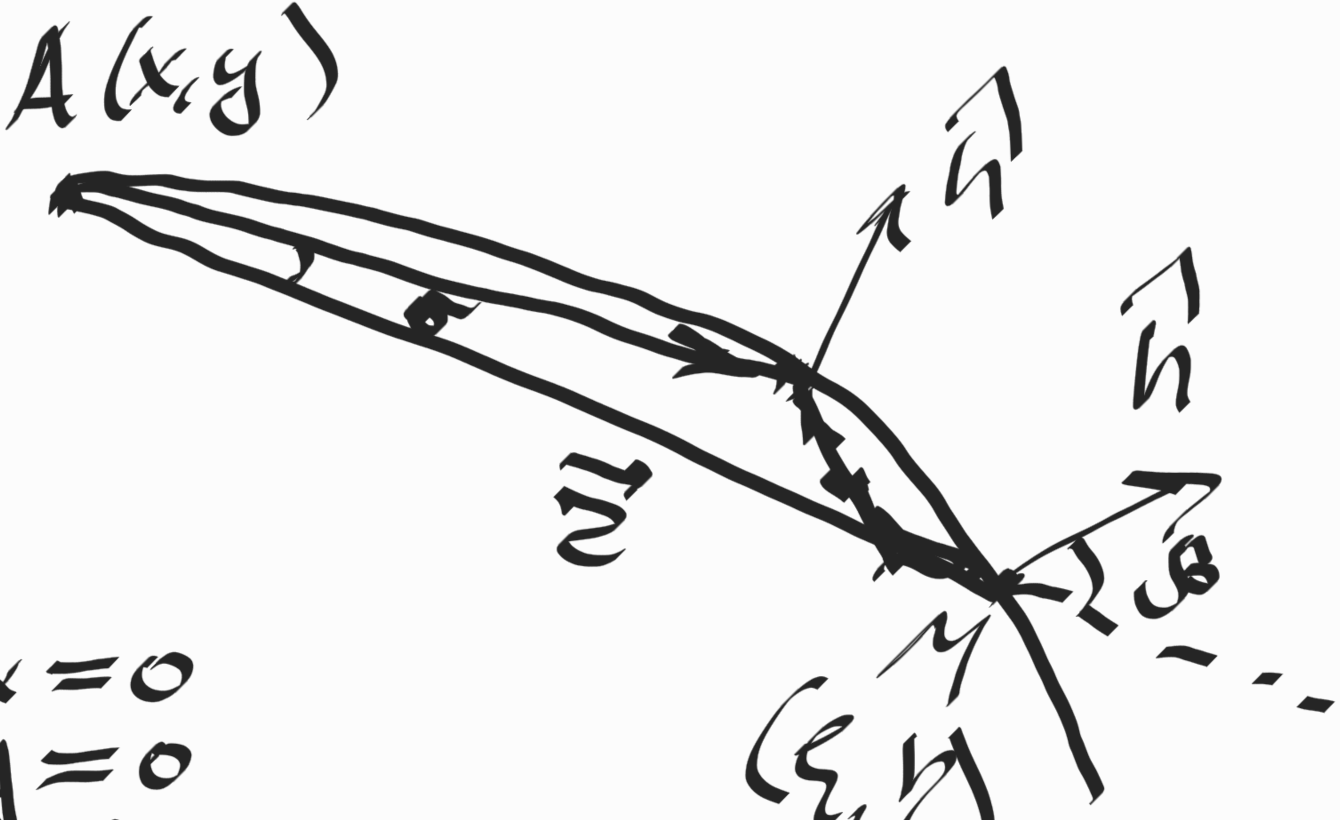


$$u(x,y) = \oint_C \frac{\cos(\hat{n},\hat{r})}{r}\,dl =$$

$$= \int_{U_\varepsilon(A)} \frac{\cos(\hat{n},\hat{r})}{r}\,dl + \int_{C \setminus U_\varepsilon(A)} \frac{\cos(\hat{n},\hat{e})}{r}\,dl$$

I) Оценка интеграла

$$\int_{U_\varepsilon(A)} \frac{\cos(\hat{n},\hat{r})}{r}\,dl$$



$$\exists \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$ (техническое ур-е)

$$\exists \ \eta(\xi)\Big|_{U_\varepsilon(A)} = b\xi + c\xi^2 + O(\xi^3) = b\xi(1+O(\xi))$$

1)

$$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2(\xi)} =$$

$$= \sqrt{\xi^2 + b^2\xi^2(1+O(\xi))} =$$

$$= \sqrt{1+b^2}\,\xi\left(1+O(\xi)\right)$$

2) $\cos(\hat{n}, \hat{z}) =$

$$= \cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \sigma\right) =$$

$$z(\xi) = k\xi + k_1\xi^2 + O(\xi^3)$$

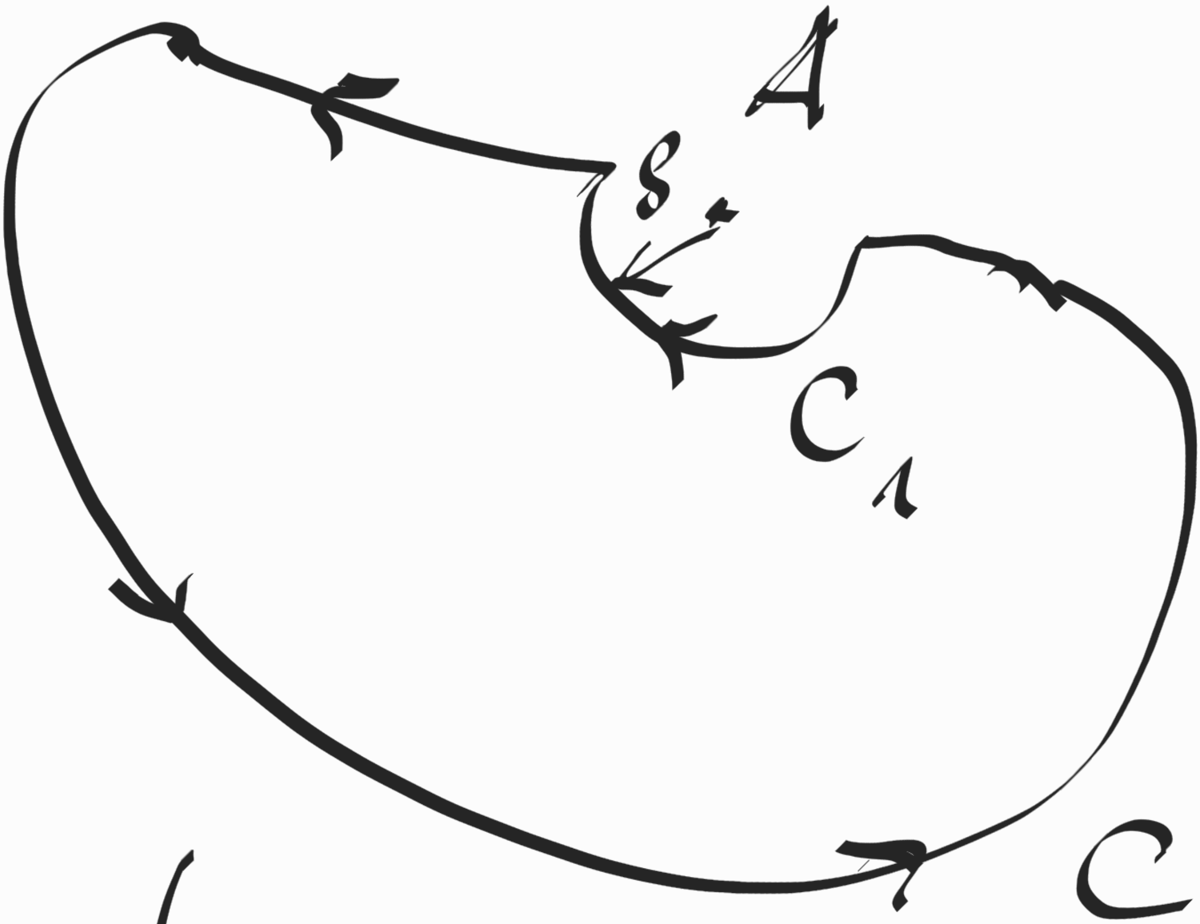
$$\sin\sigma \sim \sigma = O(\xi)$$

$$= \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0}\cos\tilde{\sigma} + \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}\,\underbrace{\sin\tilde{\sigma}}_{o(\xi)}$$

$$dl = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2} =$$

$$= d\xi\left(1 + O(\xi)\right)$$

$$\frac{S}{V_\varepsilon(A)} = \frac{o(\xi)\, d\xi\, \cancel{\left(1+O(\xi)\right)}}{\sqrt{1+B^2}\,\xi\,\cancel{\left(1+O(\xi)\right)}} = o(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$



$$\oint_C' = -\int_{C_1} = \frac{\pi \cancel{\delta}}{\cancel{\delta}} = \pi$$

∎