Лекция 13.10.21

Поверхностные интегралы 1-го рода. (Продолжение)

Пример: выч-ть площадь боковой пов-ти сферы

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \qquad (*)$$

Решение:

1) сфер. коорд-ы в $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta, \end{cases} \qquad (1)$$

$\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Из ур-я $(*) \Rightarrow$

$$r = a \quad (*)'.$$

Подставляя ур-е $(*)'$ в ур-е для сфер. коорд., получим параметризацию пов-ти.

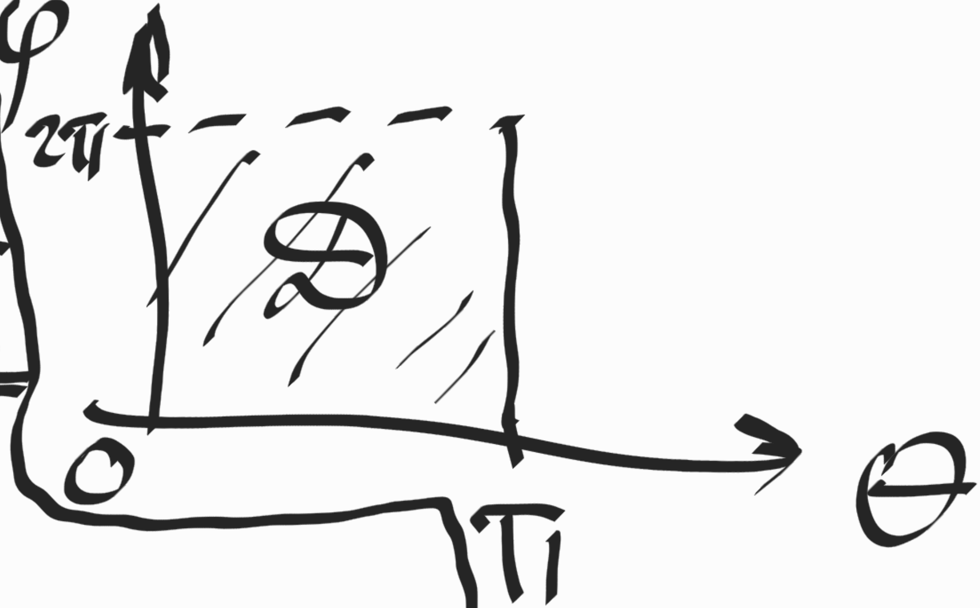
Т.о. параметризация пов-ти имеет вид:

$$\begin{cases} x = a \sin\theta \cos\varphi, \\ y = a \sin\theta \sin\varphi, \\ z = a \cos\theta \\ \theta \in [0, \pi], \ \varphi \in [0, 2\pi). \end{cases}$$

Т.о. преобразование σ:

$$\sigma: \begin{cases} x = x(\theta,\varphi), \\ y = y(\theta,\varphi), \\ z = z(\theta,\varphi), \end{cases} \quad \underline{\sigma: D \to \mathbb{R}^3}$$

$$a^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + a^2\sin^2\theta\cos^2\varphi = \underline{a^2\sin^2\theta}$$



Вычислим коэф-ы E, G, F:

$$E = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\right|^2 =$$

$$= a^2(\cos^2\theta\cos^2\varphi +$$

$$+\cos^2\theta\sin^2\varphi+\sin^2\theta)=a^2,$$

$$G=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right|^2=a^2(\sin^2\theta\sin^2\varphi+$$

$$+\sin^2\theta\cos^2\varphi)=a^2\sin^2\theta,$$

$$F=\left\langle\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta},\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right\rangle=$$

$$=a^2\left(\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\varphi\\ \cos\theta\sin\varphi\\ -\sin\theta\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}\right)=$$

$$=a^2(-\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi+$$

$$+\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi)=0.$$

Вычислим площадь

пов-ти сферы:

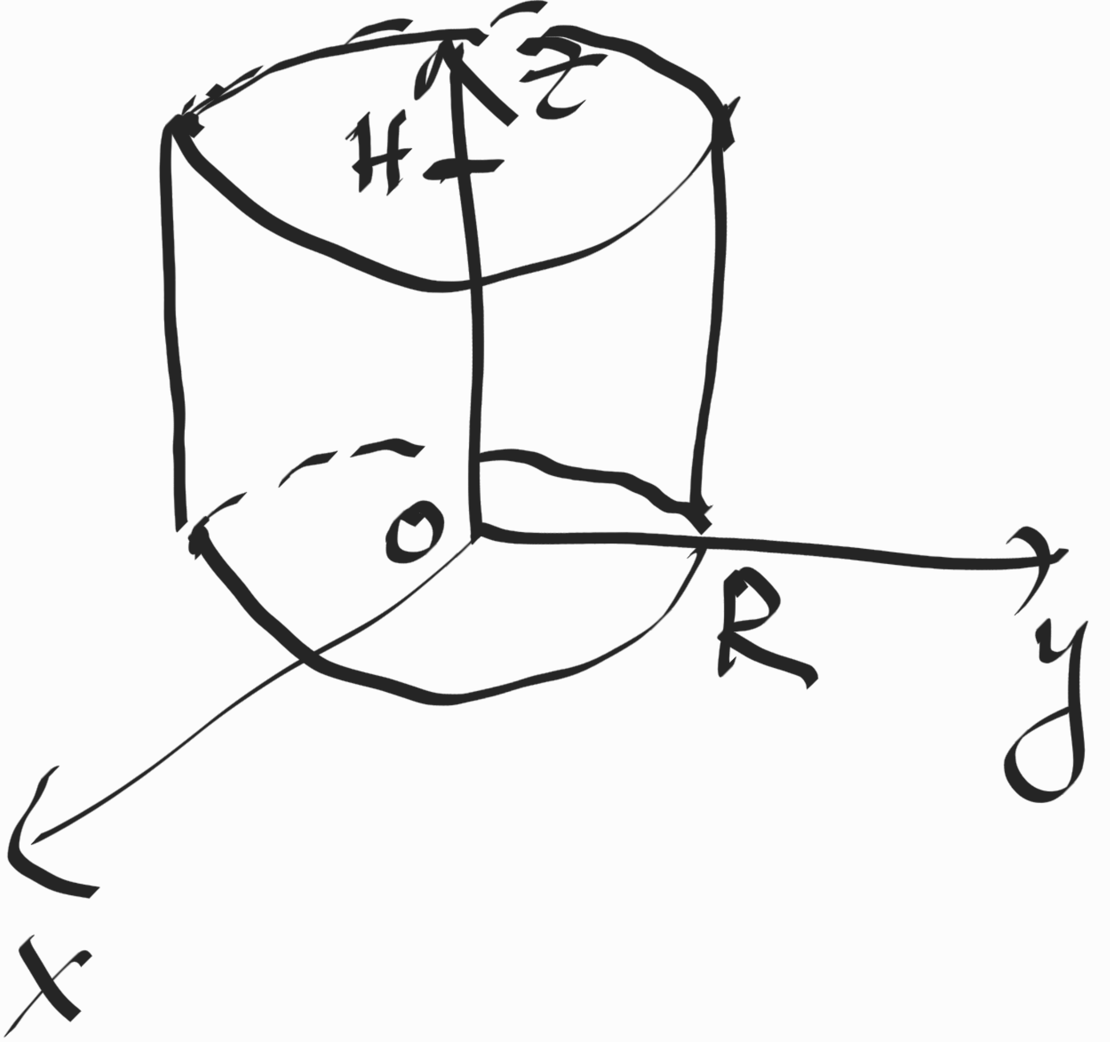
$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sqrt{EG - F^2} =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \cdot a^2 \sin\theta = 2\pi \cdot 2 \cdot a^2 =$$

$$= 4\pi a^2$$

Пример 2: вычислить площадь боковой пов-ти цилиндра высоты H и радиуса R.

$$(2)\ x^2 + y^2 = R^2, \quad h \in [0, H]$$



<u>Решение</u>:

Введем в $\mathbb{R}^3$ цилиндрические коорд-ты:

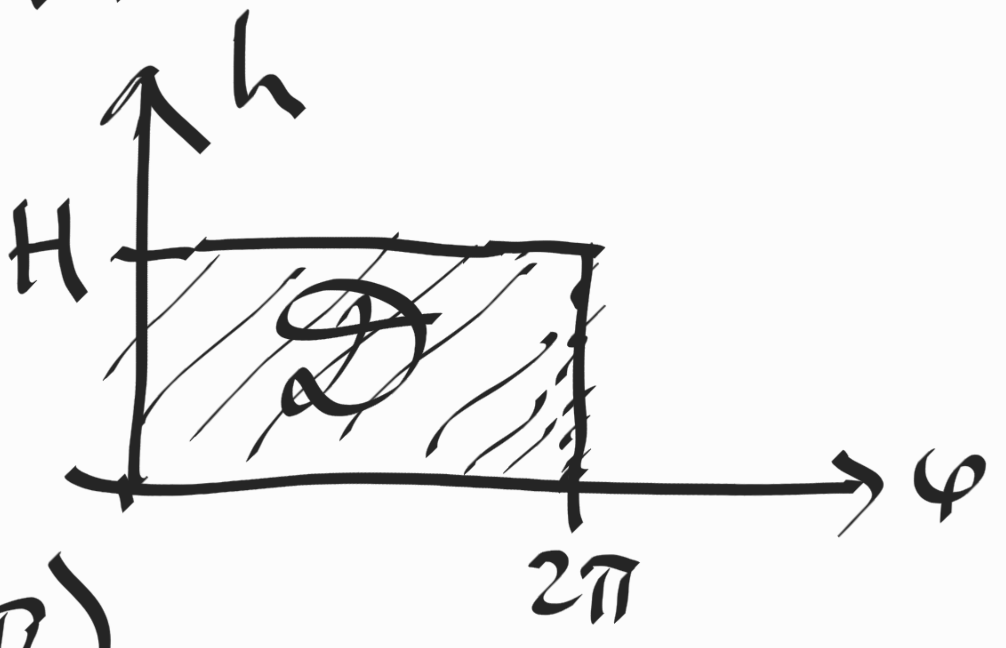
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = h \end{cases} \qquad \begin{matrix} (x, y, z) \\ \downarrow \\ (r, \varphi, h). \end{matrix} \qquad (3)$$

Подставим коорд-ы (3) в ур-е (2):

$$r^2 = R^2 \Rightarrow r = R$$

Придём к естественной параметризации:

$$\sigma: \begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \\ z = h \end{cases} \qquad \mathcal{D} \to \mathbb{R}^3$$



$\varphi \in [0, 2\pi)$

$h \in [0, H]$;

Вычислим коэф-ы

E, G, F :

1) $E = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right|^2 = R^2 \sin^2\varphi + R^2 \cos^2\varphi =$

$= R^2$

2) $G = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial h}\right|^2 = 1$

3) $F = \left\langle \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial h} \right\rangle =$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

Вычислим площадь боковой пов-ти цилиндра:

$$S=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H dh \sqrt{R^2} = 2\pi R H \quad \blacksquare$$

Пример 3: вычисление площади пов-ти, заданной явно.

$\forall$ уравнение пов-ти S, имеющее вид:

$$z = f(x,y), \quad (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

Вычислим коэф-ы E, G, F:

1) $E = \left(\frac{\partial x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 =$

$\underbrace{\left(\frac{\partial x}{\partial x}\right)}_{1}$, $\underbrace{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}_{0}$

$$= 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2;$$

2) $G = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 =$

$\underbrace{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)}_{0}$, $\underbrace{\left(\frac{\partial y}{\partial y}\right)}_{1}$

$$= 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2;$$

3) $F = \left\langle \frac{\partial \vec{r}}{\partial x}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right\rangle =$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial x} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial z}{\partial x} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} ;$$

$$\sqrt{EG - F^2} =$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \cancel{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} - \cancel{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} =$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} ;$$

Получаем, что площадь поверхности имеет вид:

$$S=\iint\limits_{D}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$$

<u>Пример</u>:

вычислить площадь поверхности конуса

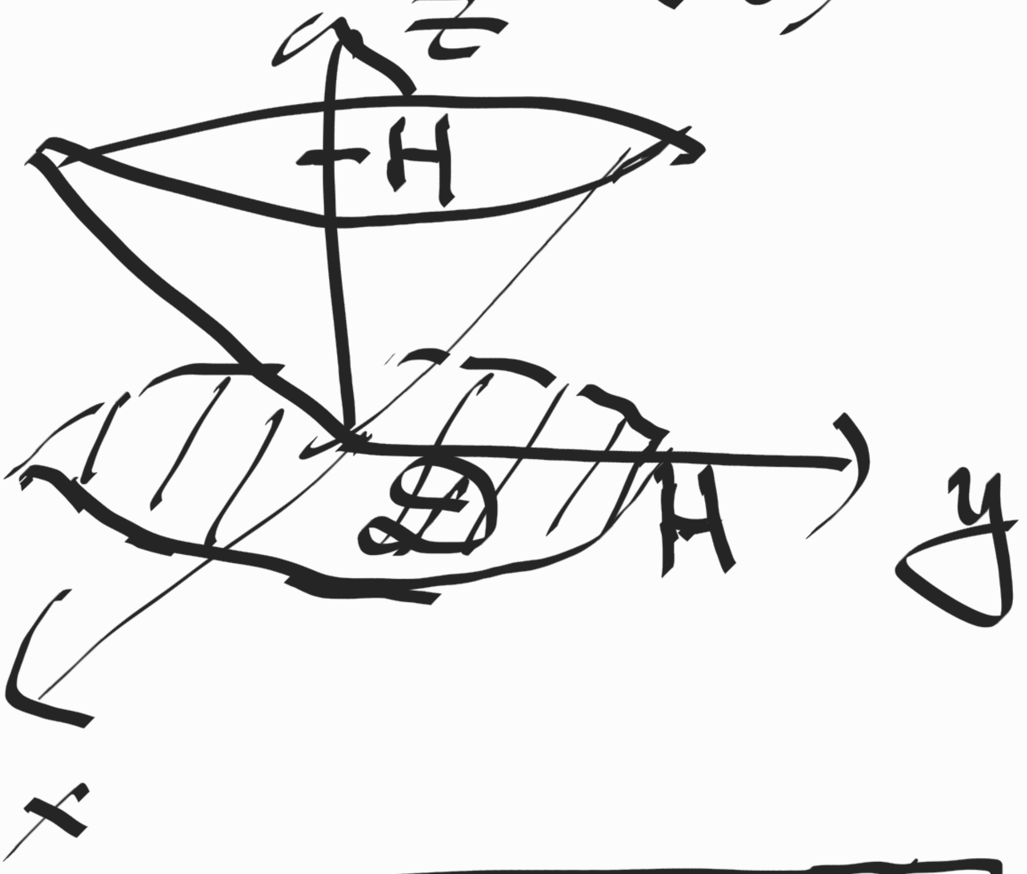
$$x^2+y^2=z^2;\quad 0\le z\le H.$$

<u>Решение</u>:

поскольку $z(x,y)=\sqrt{x^2+y^2},$

TO :

$$S = \iint\limits_{D} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy =$$



$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le H^2} \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\, dx\, dy =$$

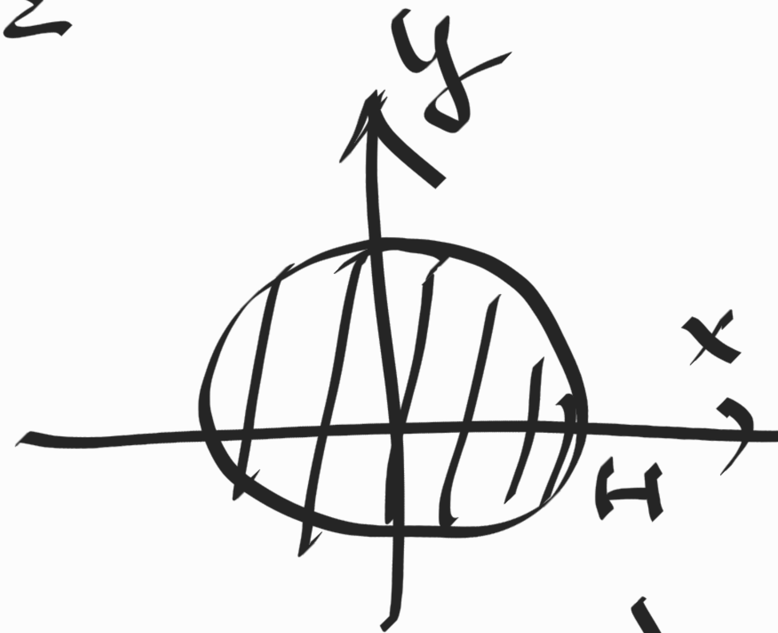
$$= \underline{\iint\limits_{x^2+y^2\le H^2} \sqrt{2}\, dx\, dy} = \underline{\pi\sqrt{2}H^2}$$

$\blacksquare$

1)

$$\sqrt{2}\cdot\iint\limits_{x^2+y^2\le H^2} dx\,dy =$$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$



$$r\in[0,H],\quad \varphi\in[0,2\pi)$$

$$=\sqrt{2}\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}\underbrace{\int_0^{H} dr\cdot r} =$$

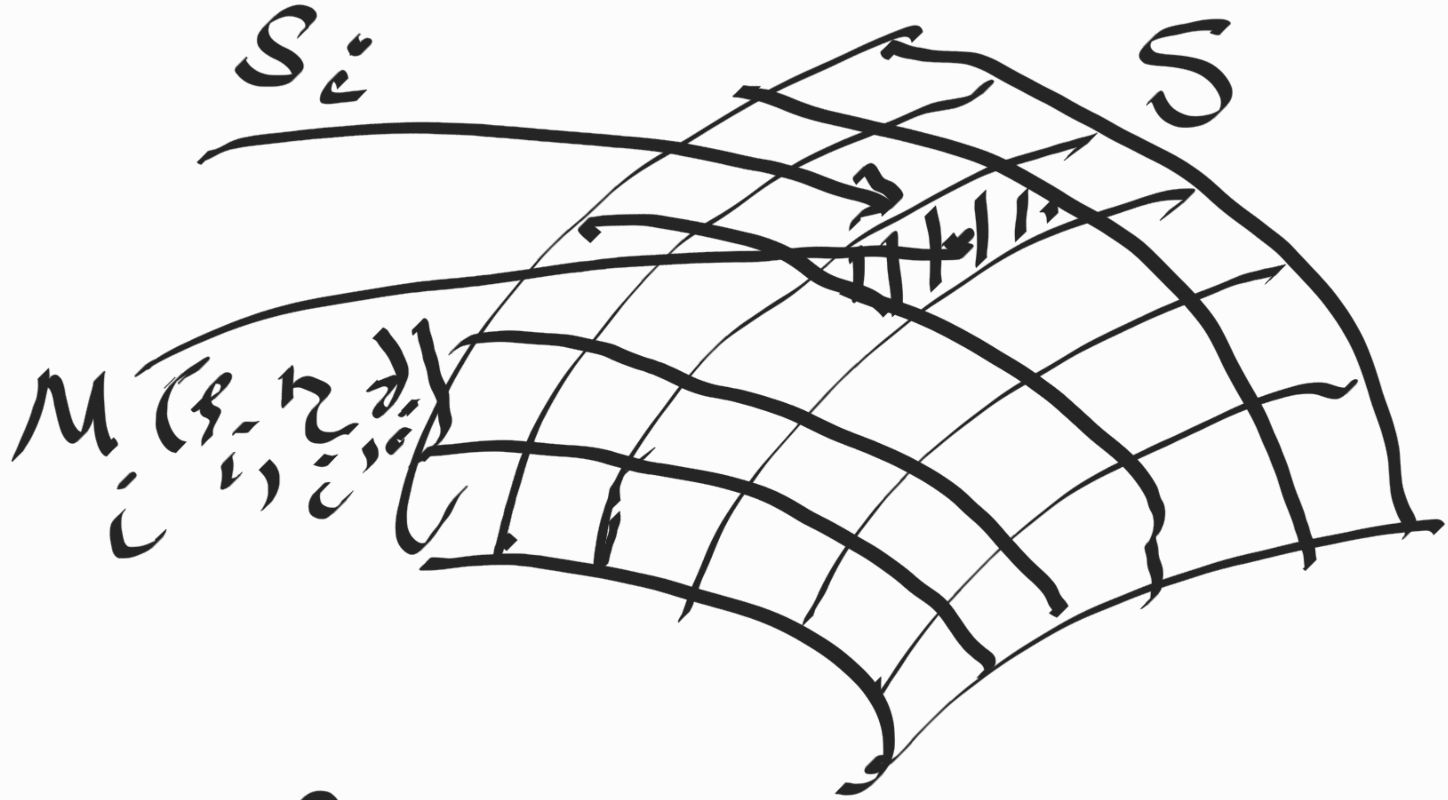
$$=\sqrt{2}\cdot\overset{1}{\cancel{2}}\pi\cdot\frac{1}{\cancel{2}}H^2$$

$$=\sqrt{2}\pi H^2$$

■

Определение поверхностного интеграла 1-го рода

$\forall$ пов-ть S :



Пусть f задана на S, $\{S_i\}_{i=1}^{n}$ – разбиение S.

$M_i(\xi_i, \eta_i, \vartheta_i)$ — некоторая внутренняя (·) элемента S_i

$$\sigma = \sum_{i=1}^{N} f(M_i) \cdot S(s_i)$$

Важно! Предполагаем, что поверхность S имеет дифференцируемую параметризацию (чтобы найти площадь $S(s_i)$).

$(x, y, z \in C^1(\mathcal{D}))$ $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$

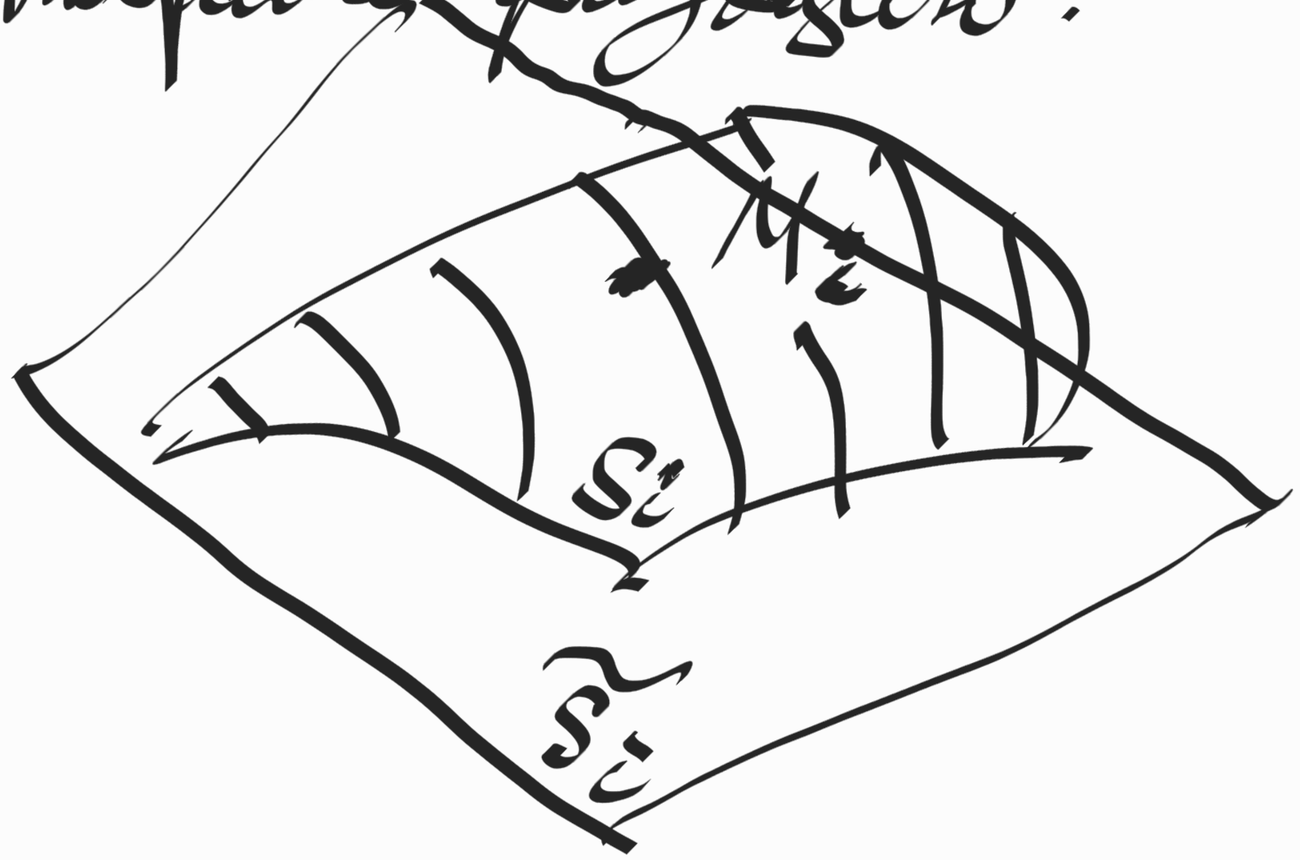
Тогда: $(u, v) \in \mathcal{D}$.

если $\exists \lim\limits_{\max\limits_{i}(\operatorname{diam} s_i)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{N} f(M_i)\,S(s_i) =$

$$= \iint\limits_{S} f(x,y,z)\,dS,$$

то он называется поверхностным интегралом 1-го рода, $f(x,y,z)$ называется интегрируемой по поверхности S.

Наши рассуждения можно распространить на недифференцируемую параметризацию.



В точке M_i построим касательную (к элементу поверхности S_i) плоскость. Построим

$\tilde{S}_i$ — проекцию S_i на касательную плоскость к пов-ти S в точке M_i.

Тогда $\sum\limits_{i=1}^{N} f(M_i)\, \underline{S(S_i)} \to$

$\to \sum\limits_{i=1}^{N} f(M_i)\, \underline{S(\tilde{S}_i)}$.

(удалось отказаться от условия дифференцируемости параметризации).

§ Свойства и физический смысл поверхностного интеграла 1-го рода.

1) Линейность

$\exists\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, f, g – интегрируемы на σ.

Тогда:

$$\iint\limits_{\sigma} (\alpha f + \beta g)\, ds = \alpha \iint\limits_{\sigma} f\, ds + \beta \iint\limits_{\sigma} g\, ds$$

2) Аддитивность

Пусть $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$,

$\sigma_1 \cap \sigma_2 = \varnothing$,

f - интегрируема на σ.

Тогда: $\iint\limits_{\sigma} f\,ds =$

$= \iint\limits_{\sigma_1} f\,ds + \iint\limits_{\sigma_2} f\,ds$

3) Монотонность

Пусть f, g интегрируемы на σ,

$f \le g$, в $\forall$ точке пов-ти σ. Тогда:

$$\iint_{\sigma} f\,ds \le \iint_{\sigma} g\,ds.$$

4) <u>Сведение к двойному интегралу</u>

$\exists$ параметризация пов-ти:

$$\theta: \begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v), \end{cases} \qquad D \to \sigma \subset \mathbb{R}^3$$

$(u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$,

$x, y, z \in C^1(D)$

Тогда:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_{D} \tilde{f}(u,v)\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv,$$

где $\tilde{f}(u,v) = f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$.

$$\iint\limits_{\sigma} f\,dS \sim \left\{ \sum_{i=1}^{N} f(M_i)\,S(\sigma_i) = \sum_{i=1}^{N} f(M_i)\sqrt{EG-F^2}\,\Delta u_i\,\Delta v_i + \underset{\to 0}{o(1)} \right)$$

$$\iint_{D} \tilde{f}(u,v)\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$$

$\blacksquare$