Лекция 12.10.21

Интегралы, не зависящие от пути.

(Продолжение).

1) Пример:

$\exists\ z(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$,

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{z}$.

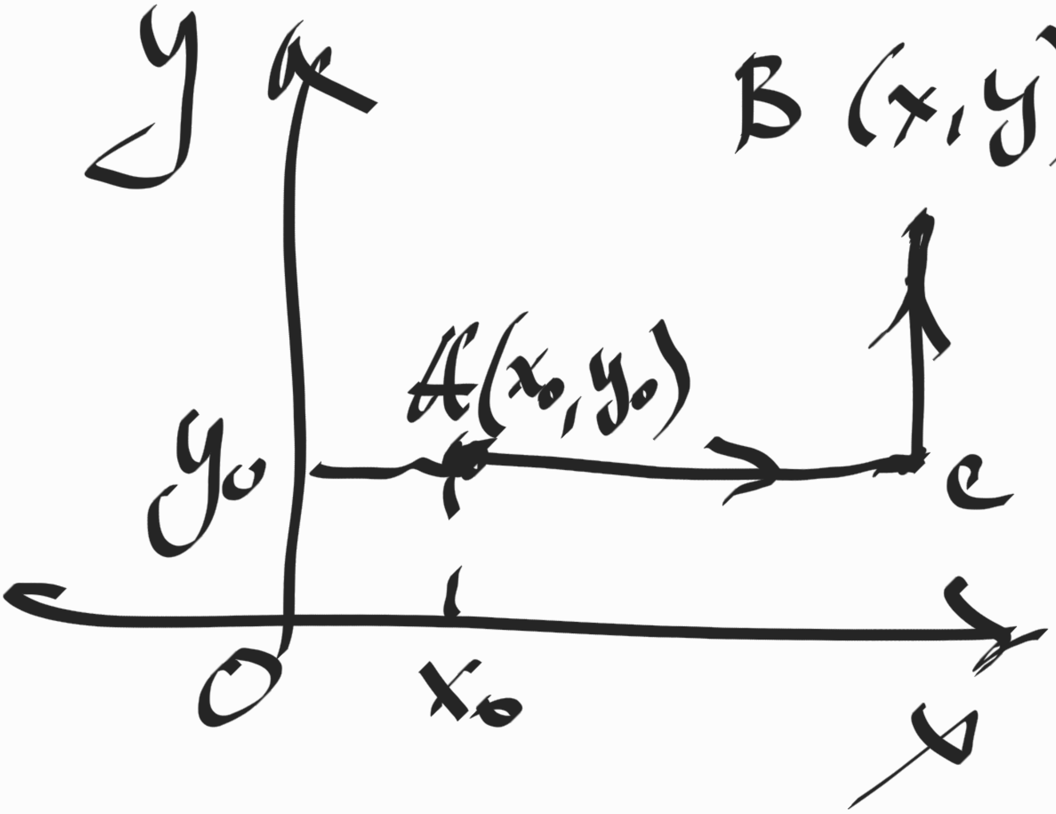
$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\frac{x'dx'+y'dy'}{z(x',y')}=$ (3) → 1)

$u(x,y)$

$$du(x,y) = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{P} dx + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{Q} dy$$

Усл-е 3)

Усл-е 1) $\int_A^B P\,dx + Q\,dy$



$$= \underbrace{\int_{x_0}^{x} \frac{x' dx'}{\sqrt{x'^2 + y_0^2}}}_{\overset{\frown}{AC}} + \underbrace{\int_{y_0}^{y} \frac{y' dy'}{\sqrt{x^2 + y'^2}}}_{\overset{\frown}{CB}} =$$

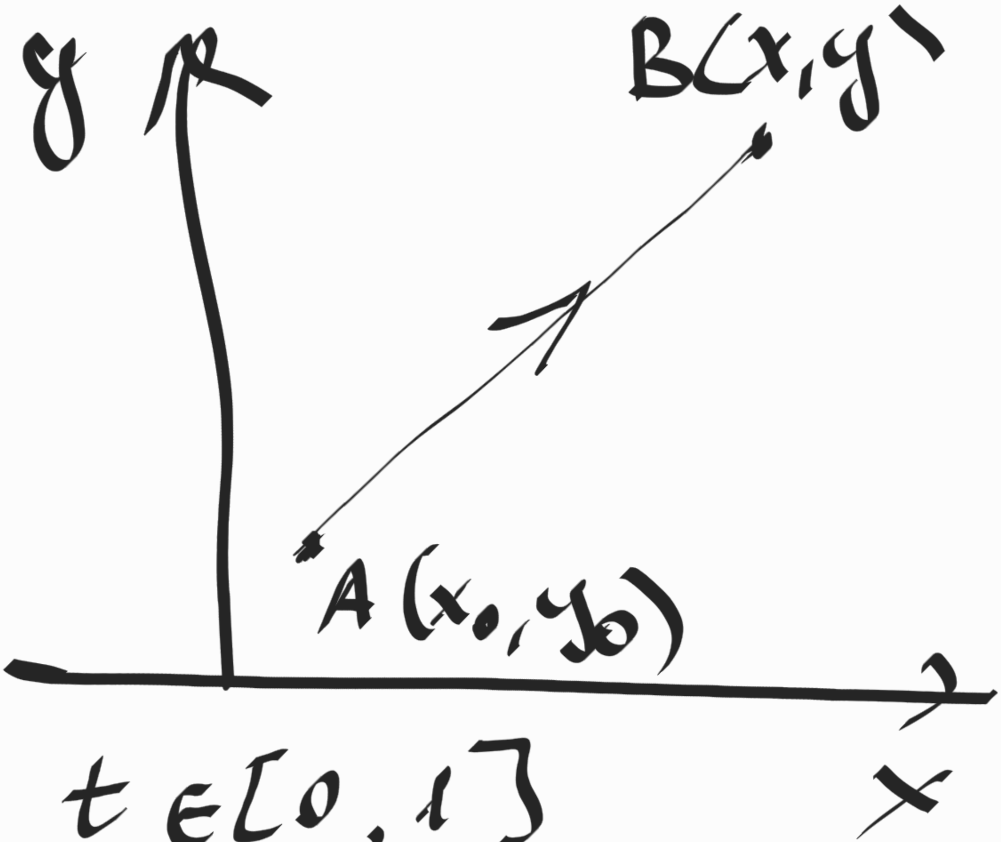
$$= \sqrt{x'^2 + y_0^2}\,\Big|_{x_0}^{x} + \sqrt{x^2 + y'^2}\,\Big|_{y_0}^{y} =$$

$$= \cancel{\sqrt{x^2 + y_0^2}} - \sqrt{x_0^2 + y_0^2} +$$

$$+ \sqrt{x^2 + y^2} - \cancel{\sqrt{x^2 + y_0^2}} =$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2} - \underbrace{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}_{\text{const}} .$$

Согласно ф-ле Пуанкаре



$t \in [0, 1]$

$$x'dx' + y'dy'$$

$$u(x,y) = \int_0^1 \frac{(x_0 + t(x-x_0))(x-x_0) + (y_0 + t(y-y_0))(y-y_0)}{\sqrt{(x_0 + t(x-x_0))^2 + (y_0 + t(y-y_0))^2}}\,dt$$

Восстановление функции

по диференциалу.

$\nexists\ Pdx+Qdy$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

2)

из 2) $\Rightarrow$ 3)

$$\Rightarrow u(x,y)=\int_{A(x_0,y_0)}^{B(x,y)} Pdx'+Qdy' = \int_A^B du,$$

где:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$$

$$u=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{\partial u}{\partial x'}dx'+\frac{\partial u}{\partial y'}dy'.$$

Пример: $\exists\, u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + C$,

$$du = \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

(*) $P(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}$, (**) $Q(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}$

$\Downarrow$

$$u = \int_{x_0}^{x} P(x',y)\,dx' + \varphi(y) \qquad (1)$$

где $\varphi(y)$ - произв. ф-я.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P(x',y)}{\partial y}\,dx' + \varphi'(y) =$$

$$\underset{(**)}{=} Q(x,y) \qquad (2)$$

$$\varphi'(y) = Q(x,y) - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P(x',y)}{\partial y}\,dx' \qquad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Q(x,y) - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P(x',y)}{\partial y}\,dx'\right) =$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

$\vee$ 2)

(действ. φ' не зависит от x).

Тогда:

$$\varphi(y)=\int^{y}\left[Q(x,y)-\int_{x_0}^{x}\frac{\partial P(x',y)}{\partial y}dx'\right]dy+C$$

Функция φ восстанавливаемая с точностью до константы.

<u>Пример</u>:

$$dU=\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$P(x,y)=\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

<u>Тогда</u>:

$$u(x,y) = \int^{x} \frac{x'dx'}{\sqrt{x'^2+y^2}} + \varphi(y) =$$

$$= \sqrt{x^2+y^2} + \varphi(y)$$

Нам известно, что:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \varphi'(y) = Q(x,y)$$

$$\parallel$$

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Тогда: $\varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = c$

Т.о. мы восстановили

$$u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \mathrm{Const}.$$

§ Поверхностный интеграл 1-го рода.

Поверхности в $\mathbb{R}^3$.

Def

Поверхность — образ отображения

$$\sigma: \underset{\subset \mathbb{R}^2}{D} \to \mathbb{R}^3$$

один и тот же образ

давая разными отображениями.

отображение σ определяет параметризацию;

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v). \end{cases} \quad (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

Пример: (4)

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1.$$

В обобщ.-сферич. коорд-ах

$$\begin{cases} x = ar\sin\theta\cos\varphi \\ y = br\sin\theta\sin\varphi \\ z = cr\cos\theta \end{cases}$$

уравнение 4) принимает вид:

$$r = 1.$$

Следовательно параметризация поверхности заданной ур-ем 4) принимает вид:

$$\sigma : \begin{cases} x = a \sin\theta \cos\varphi, \\ y = b \sin\theta \sin\varphi, \\ z = c \cos\theta, \end{cases}$$

$$D : \{\theta \in [0, \pi], \ \varphi \in [0, 2\pi)\}$$

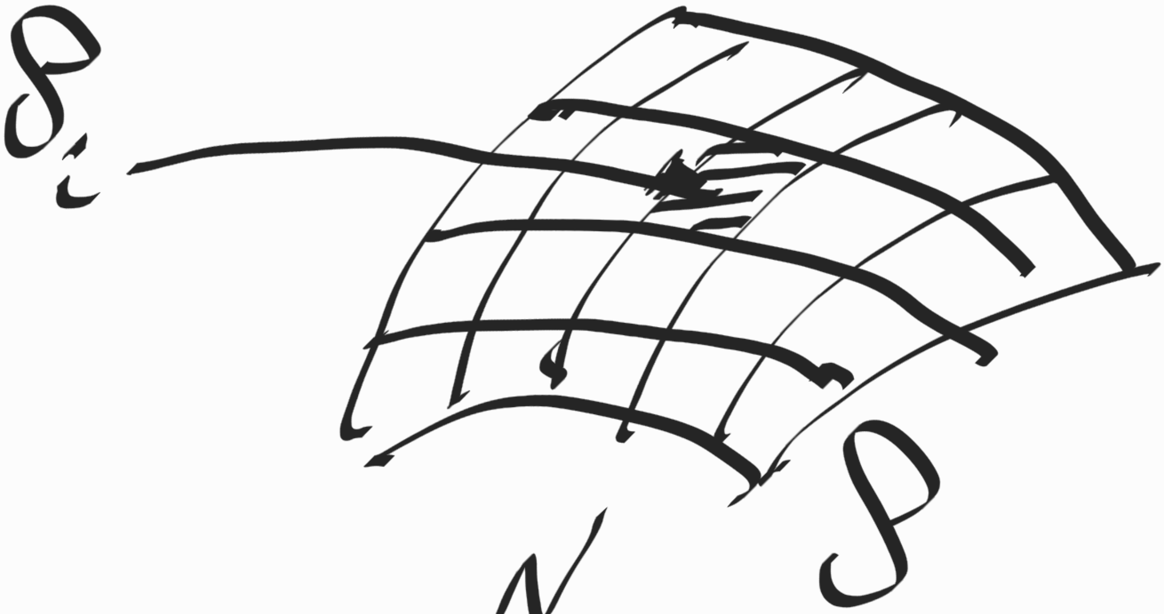
$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3.$$

$$\subset \mathbb{R}^2_{(\theta,\varphi)}$$

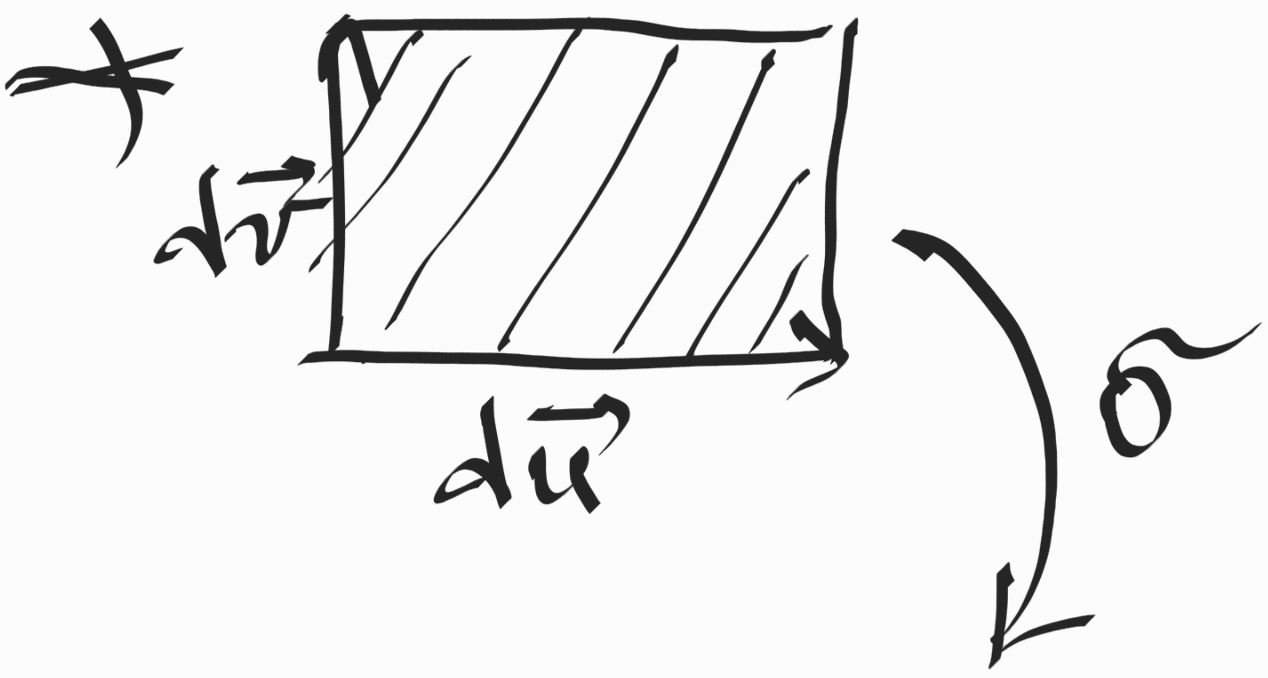
$$\underbrace{\text{Площадь поверхности.}}$$

$$\sigma : \begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v). \end{cases} \quad (u,v) \in D$$

$\sqsupset\ x, y, z \in C^1(D)$



$$S(\rho) = \lim_{\max_i \mathcal{S}(\rho_i) \to 0} \sum_{i=1}^{N} S(\rho_i)$$



Здесь:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix},$$

$$\Delta \vec{r}_u = \begin{pmatrix} x(u_0+\Delta u, v_0) - x(u_0, v_0) \\ y(u_0+\Delta u, v_0) - y(u_0, v_0) \\ z(u_0+\Delta u, v_0) - z(u_0, v_0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u + o(\Delta u) \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u + o(\Delta u) \\ \frac{\partial z}{\partial u}\Delta u + o(\Delta u) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} \underline{\underline{\Delta u}} + o(\Delta u).$$

$$\Delta \vec{r}_v = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \underline{\underline{\Delta v}} + o(\Delta v).$$

$$d\vec{r}_v = \vec{a}$$

$d\vec{r}_u$

$$S=\sqrt{a^2b^2-\langle\vec{a},\vec{b}\rangle^2}=$$

$$=ab\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\underline{ab\sin\alpha}.$$

$$] \quad \left.\begin{aligned} |\vec{a}|^2 &\equiv |d\vec{r}_u|^2 \\ |\vec{b}|^2 &\equiv |d\vec{r}_v|^2 \\ \langle\vec{a},\vec{b}\rangle &\equiv \langle d\vec{r}_u, d\vec{r}_v\rangle \end{aligned}\right\}$$

$S \equiv$

$$= \frac{\left|[\Delta\vec{r}_u \times \Delta\vec{r}_v]\right|}{} =$$

$$= \left|\det\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}\right| \Delta u \Delta v$$

$$+ o(\Delta u \cdot \Delta v).$$

T. o.

$$\left|\det(\cdots)\right|^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 +$$

$$+\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 =$$

$$= EG - F^2,$$

где $E \equiv \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right|^2$, $G \equiv \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|^2$,

$$F \equiv \left\langle \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\rangle;$$

Теперь:

$$S_e = \sqrt{EG - F^2}\,\Delta u \cdot \Delta v + o(\Delta u \Delta v).$$

Тогда мы можем вычислить площадь

полной поверхности ρ:

$$S(\rho) = \lim_{\max\limits_i \Delta u_i \Delta v_i \to 0} \left(\sum_i \sqrt{EG - F^2}\, \Delta u_i \Delta v_i + o(1) \right) =$$

$$= \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv \; ;$$