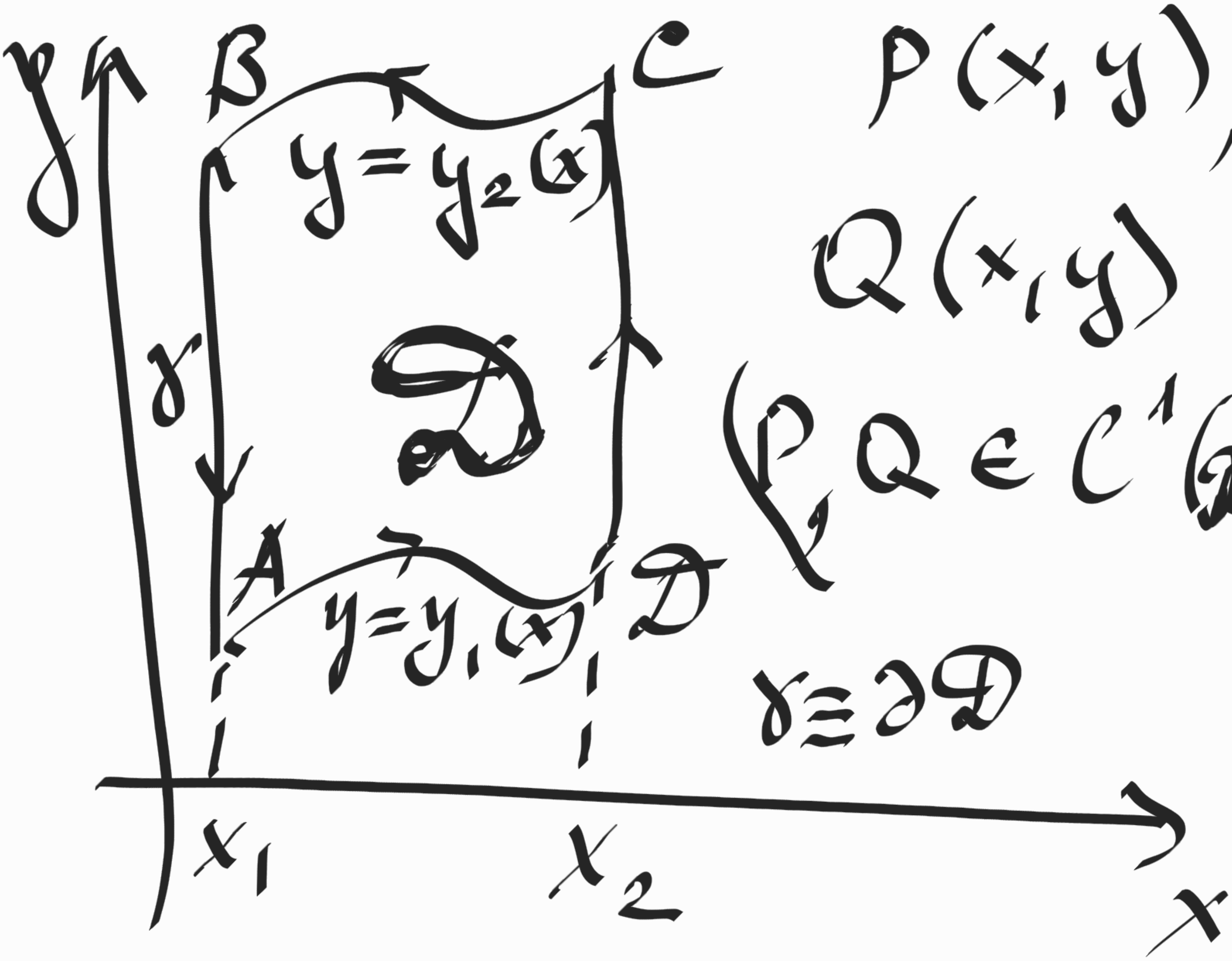
Лекция 06.10.21.

Доказательство формулы Грина.



$P(x,y)$,

$Q(x,y)$

$(P, Q \in C^1(D))$

$\gamma \equiv \partial D$

$$+\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy =$$

$$\overset{\text{повт.}}{\underset{\text{инт-л}}{=}} \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \, \frac{\partial P}{\partial y} =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left[P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x)) \right] =$$

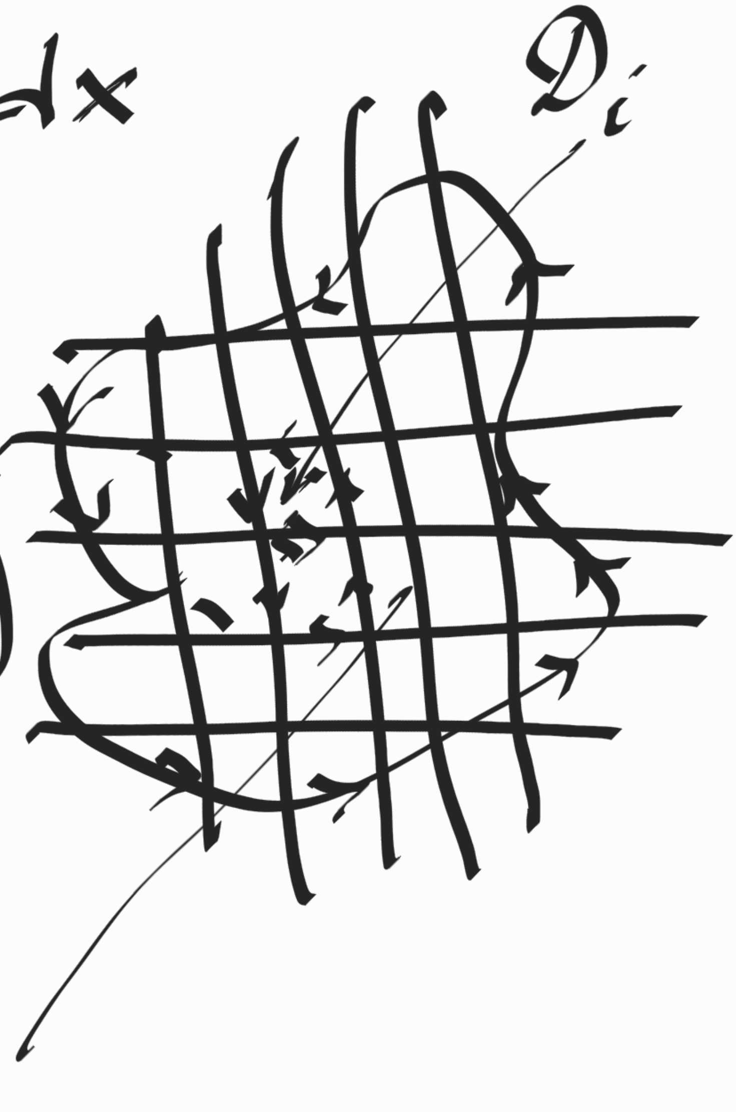
$$= \int_{\overset{\frown}{BC}} P(x,y)\,dx - \int_{\overset{\frown}{AD}} P(x,y)\,dx =$$

$$= - \oint_{\gamma} P(x,y)\,dx.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\iint_{D} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \sum_{i} \iint_{D_i} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \\ \gamma_i \equiv \partial D_i \end{array} \right.$$

$$= -\sum_{i} \oint_{\gamma_i} P(x,y)\,dx =$$

$$= -\int_{\gamma} P\,dx$$



$$\begin{cases} (1) \quad \iint\limits_{\mathcal{D}} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\oint\limits_{\gamma} P\,dx \\ (2) \quad \iint\limits_{\mathcal{D}} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = +\oint\limits_{\gamma} Q\,dy \end{cases}$$

Вычтем ур-е (1) из уравнения (2):

$$\oint_{\gamma} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy \;\blacksquare$$

Интегралы, не зависящие от пути.

Теорема: $\exists$ функции P и Q заданы и имеют непрерывные частные

производные 1-го порядка
в односвязной области
D. ∃ A и B - произволь-
ные точки в D.

<u>Тогда</u>: <u>следующие
утверждения эквивалентны</u>

1) $\int\limits_{AB} P dx + Q dy$

не зависит от пути
интегрирования, а зависит
лишь от начальной и конечной

точки

2) Справедливо равенство:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

3) $\exists$ функция u в D,

такая, что:

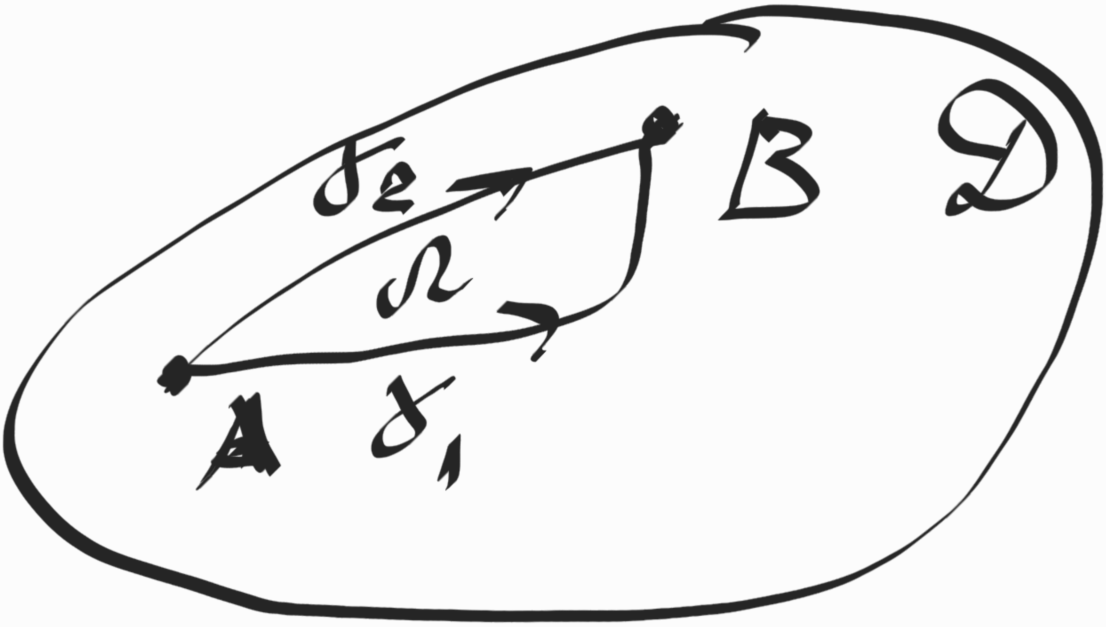
$du = Pdx + Qdy$,

$P = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$.

<u>Доказательство</u>:

1) $\Rightarrow$ 2)

$$\int_{\gamma_1} Pdx + Qdy = \int_{\gamma_2} Pdx + Qdy \qquad (*)$$



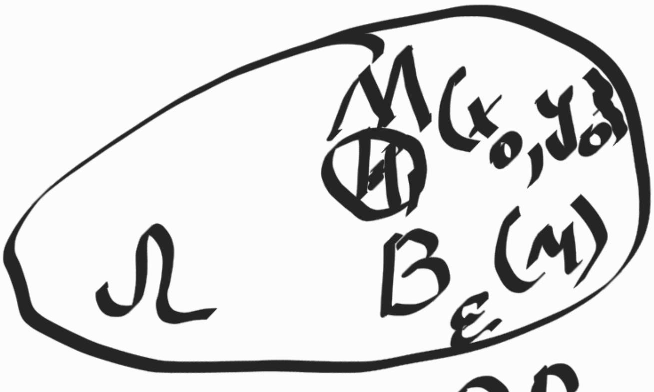
$$\exists\ \gamma \equiv \gamma_1 - \gamma_2$$

$$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy \overset{(*)}{=} 0$$

$$\parallel$$

Тогда $\iint\limits_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = 0$

по ф-ле Грина



$$\exists\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \neq 0 \ (>0)$$

в (·) (x_0, y_0).

$\exists$ (в следствие того, что $P, Q \in C^1(D)$)

окрестность $B_\varepsilon(x_0, y_0)$:

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right|_{B_\varepsilon(M)} > 0$$

Тогда $\displaystyle\iint\limits_{B_\varepsilon(x_0,y_0)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy > 0$

$$\parallel$$

$$\int\limits_{\partial B_\varepsilon(x_0,y_0)} P\,dx + Q\,dy > 0$$

Пришли к противоречию с утв-ем 1). $\blacksquare$

$\Downarrow$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \text{ всюду на } \Omega.$$

---

2) $\Rightarrow$ 1)

$$\exists \left. \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{D} = 0$$

$\Omega \subset D$,

$\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$

$$\int_{\gamma} P\,dx + Q\,dy =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = 0$$

С другой стороны:

$$\int\limits_{\gamma} = \int\limits_{\gamma_1} - \int\limits_{\gamma_2} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\int\limits_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy =$$

$$= \int\limits_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy.$$

■

---

3) $\Rightarrow$ 2)

$\exists\ du = P\,dx + Q\,dy$,

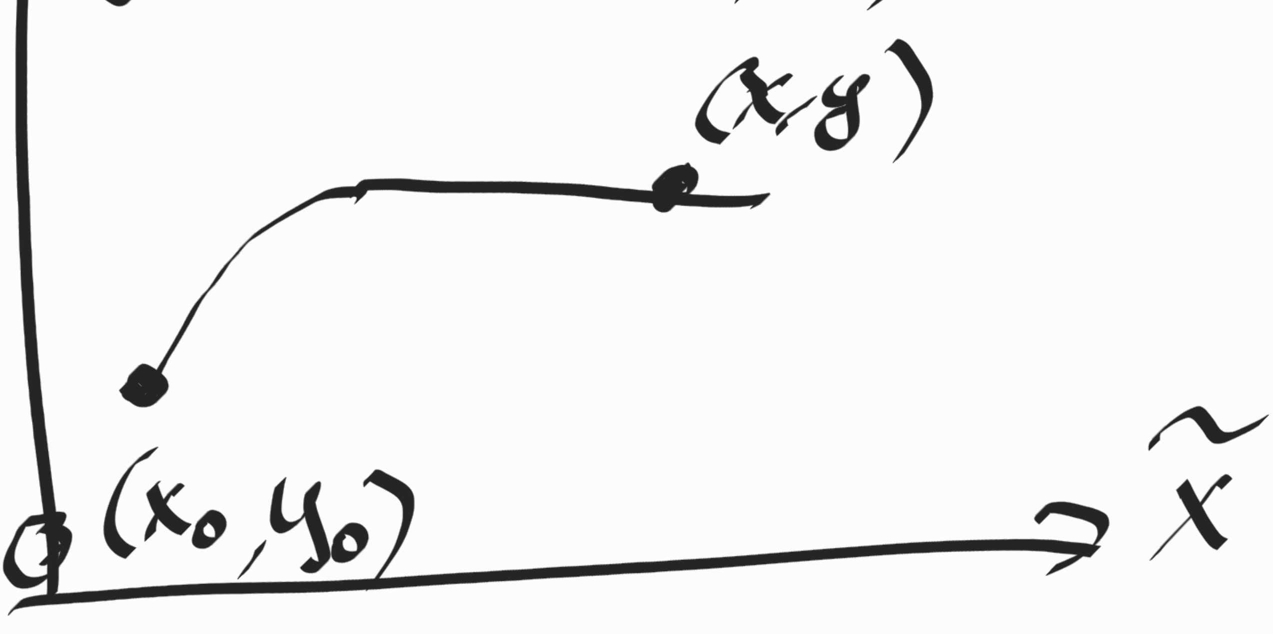
$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

■

1) $\Longrightarrow$ 3)

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx' + Q\,dy'$$



Выберем контур интегрирования так, чтобы в окр-ти точки (x,y) он был бы параллелен оси $\overrightarrow{OX}$.

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)} (P\,dx' + Q\,dy') - \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (P\,dx' + Q\,dy')\right] =$$

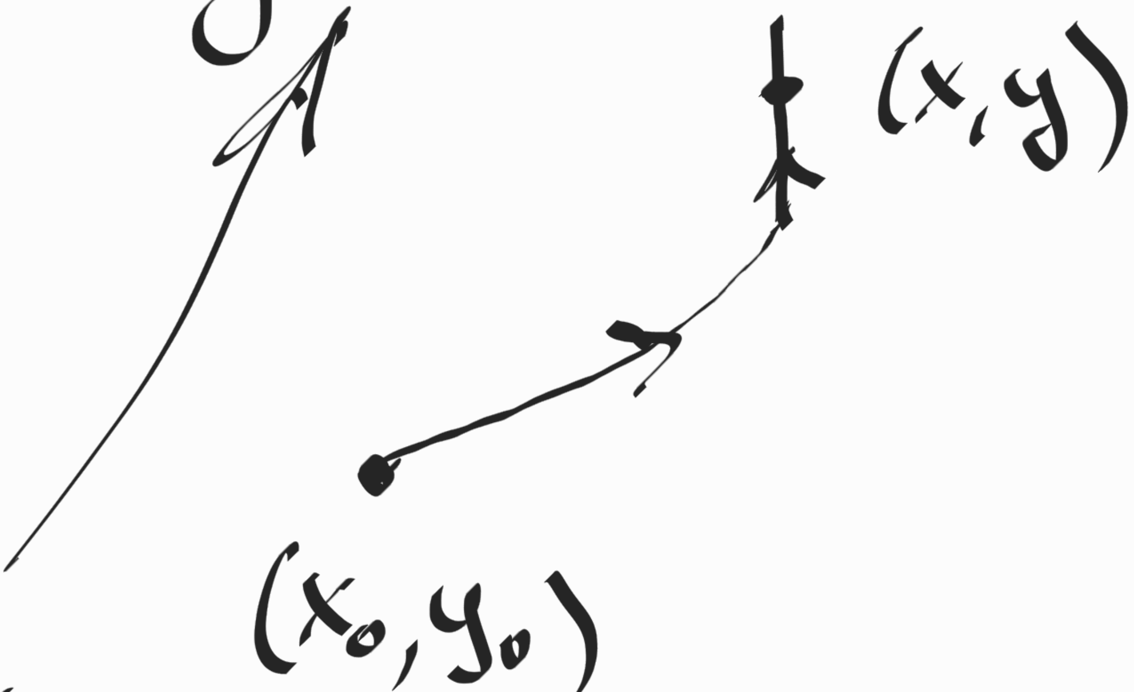
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ \frac{1}{\Delta x}\left[\int_{x_0}^{x+\Delta x} P(x',y)\,dx' - \right.\right.$$

$$- \int_{x_0}^{x} P(x', y)\,dx' \Big] \Big\} =$$

$$= \frac{d}{dx} \int_{x_0}^{x} P(x', y)\,dx' =$$

$$= P(x, y) \;;$$

$$* \;\; \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y)$$



(повторяя предыдущие

рассуждения при новом выборе контура).

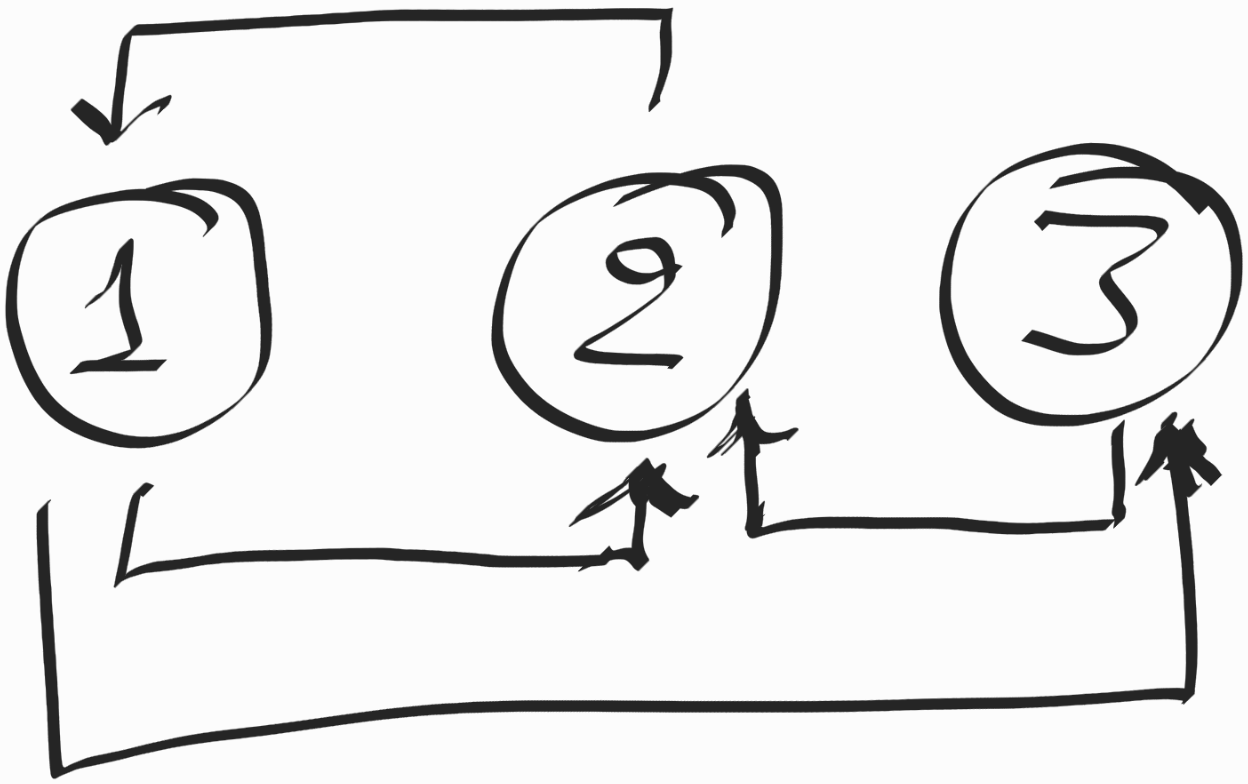
$$\Rightarrow u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx' + Q\,dy',$$

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y}. \blacksquare$$

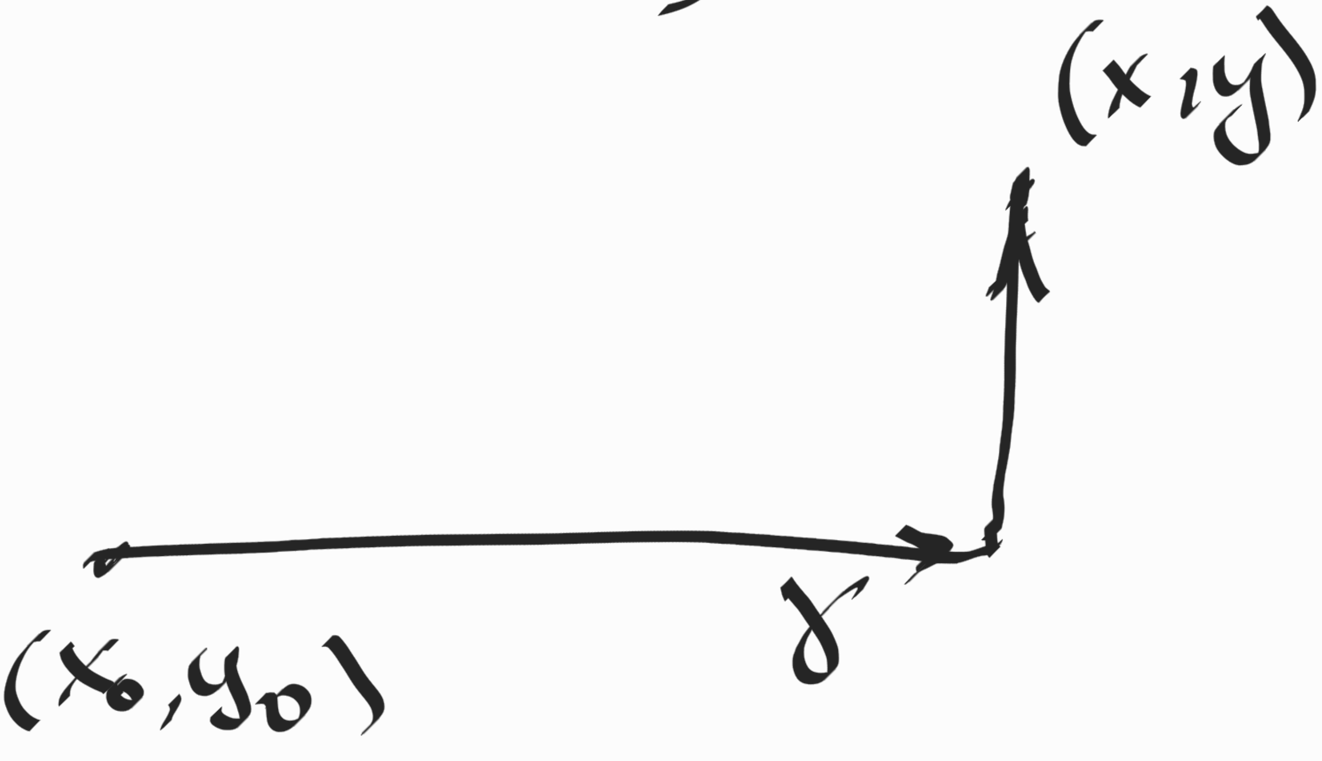
Вычисление интегралов, не зависящих от пути.

$$\exists\ du = P\,dx + Q\,dy$$

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y} \Big\} \; 3$$



Но тогда вып-ся и св-во 1).



$$\int_\gamma P\,dx' + Q\,dy' =$$

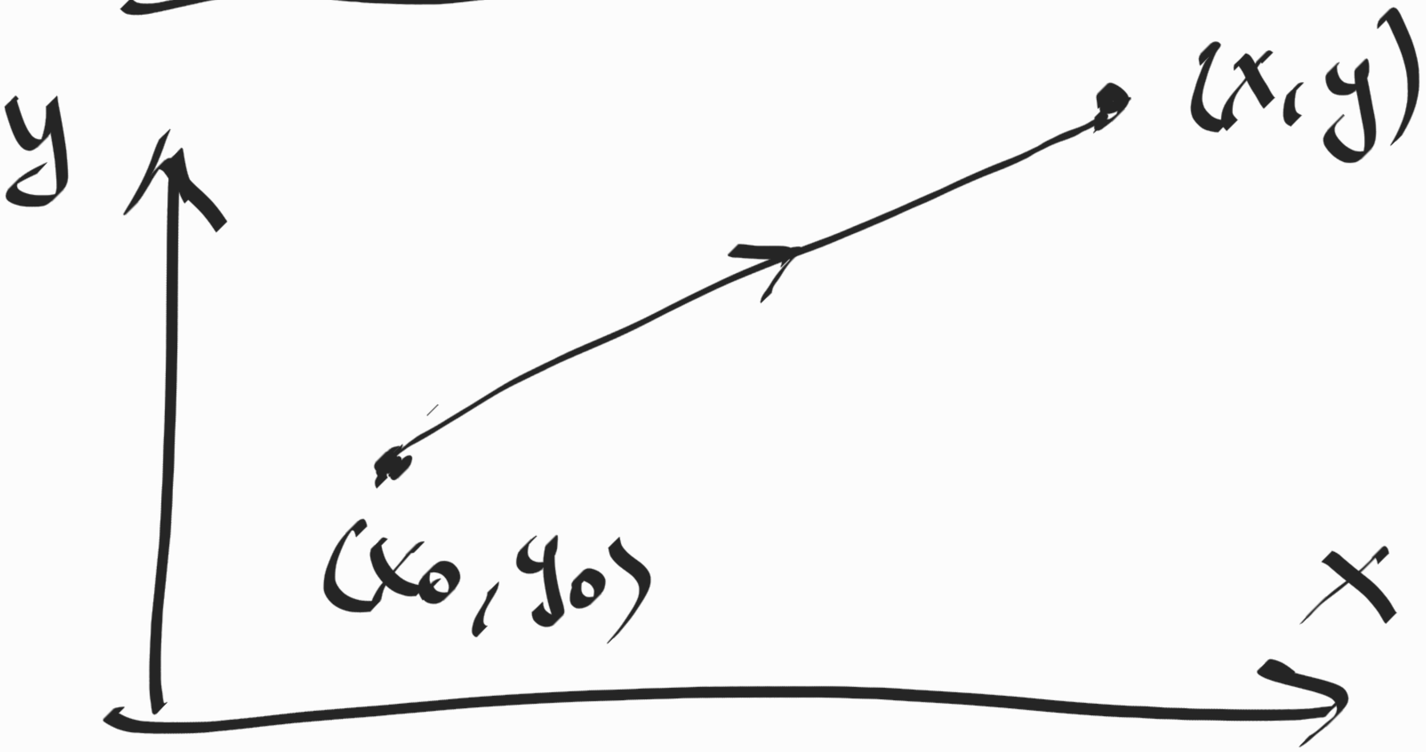
$$= \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)} \left(P\,dx' + \underbrace{\cancel{Q\,dy}}_{=0}\right) +$$

$$+ \int_{(x,y_0)}^{(x,y)} \left(\underbrace{\cancel{P\,dx'}}_{=0} + Q\,dy'\right) =$$

$$= \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)} P(x',y_0)\,dx' +$$

$$+ \int_{(x,y_0)}^{(x,y)} Q(x,y')\,dy';$$

Ф-ла Пуанкаре



Введем параметризацию контура:

$$\exists \begin{cases} x' = x_0 + t(x - x_0), \\ y' = y_0 + t(y - y_0) \end{cases}$$

$t \in [0, 1]$

Тогда:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\Bigg|_{t=1} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

<u>ф-ла Пуанкаре</u>:

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx' + Q\,dy' =$$

$$= \int_0^1 dt \left[\tilde{P}(t)(x-x_0) + \tilde{Q}(t)(y-y_0) \right]$$

где $\tilde{P}(t) =$

$$= P\big(x_0 + t(x-x_0),\, y_0 + t(y-y_0)\big),$$

$$\tilde{Q}(t) = Q\left(x_0 + t(x - x_0),\ y_0 + t(y - y_0)\right),$$