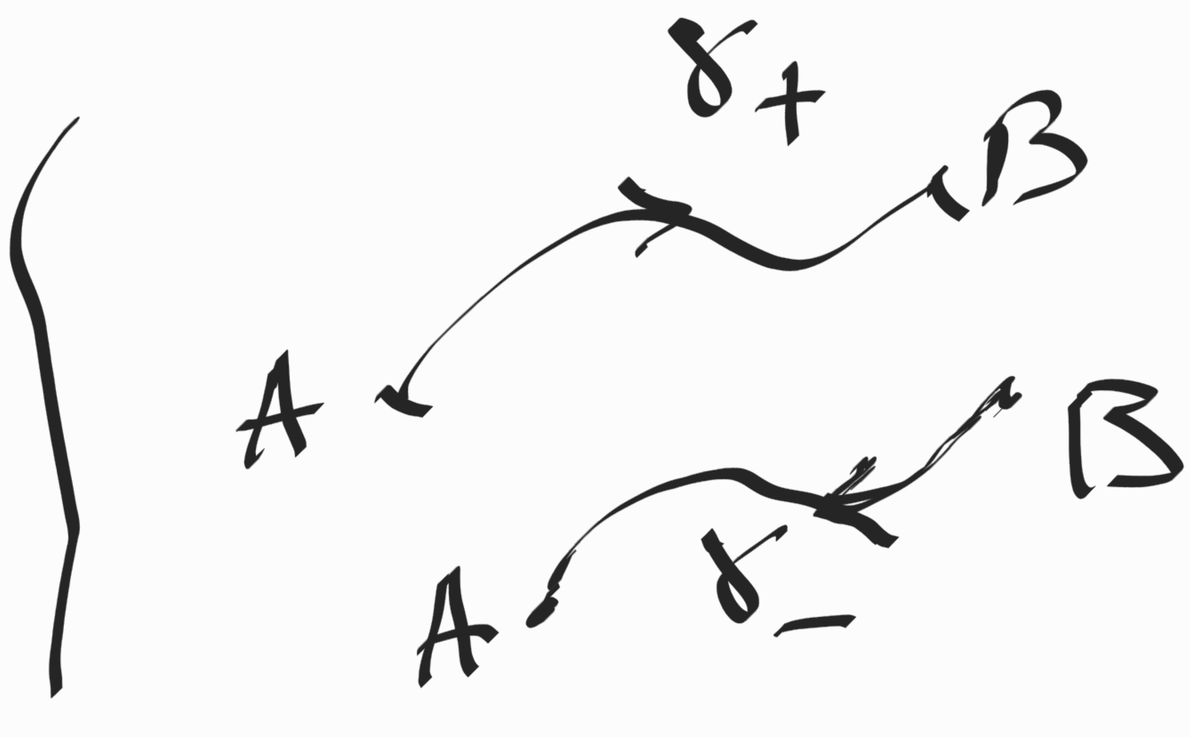
Лекция 05.10.21.

Свойства криволин. интеграла 2-го рода.

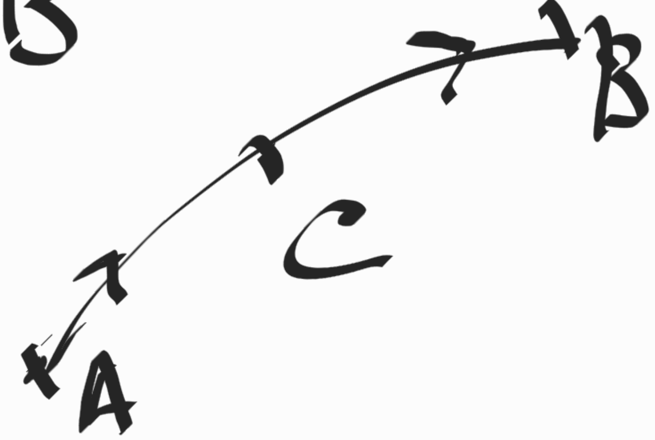
1) $\exists$ γ_+, γ_- – кривая γ с различными ориентациями.



Тогда: $\int\limits_{\gamma_+} P\,dx + Q\,dy = - \int\limits_{\gamma_-} P\,dx + Q\,dy$

2) Аддитивность:

$\exists\ (\cdot) \in \overset{\smile}{AB}$

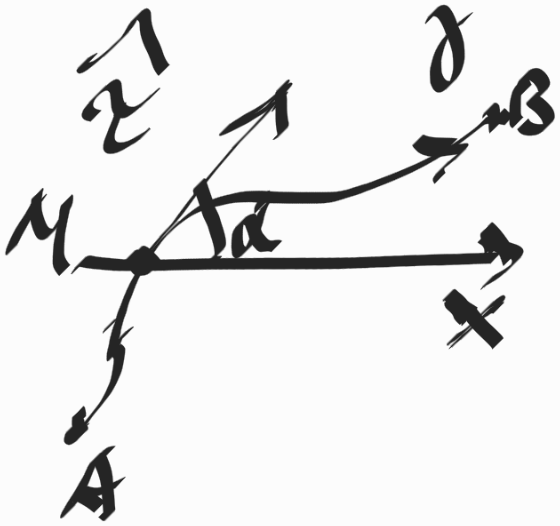


Тогда

$$\left(\int\limits_{\overset{\smile}{AC}} + \int\limits_{\overset{\smile}{CB}} \right) P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} P\,dx + Q\,dy$$

3) Связь криволин. интегралов 1-го и 2-го рода.

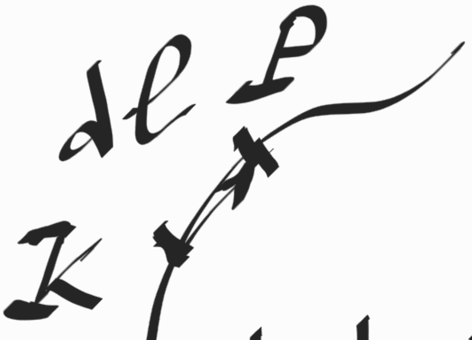
$$\hat{\tau} = \frac{\vec{\tau}}{|\vec{\tau}|}$$



$$\hat{\tau} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

I ;

dl - дифферен-л длины дуги



$$|dl| = |KP|$$

$$\vec{dl} = \hat{\tau}\, dl = \begin{pmatrix} dl \cdot \cos\alpha \\ dl \cdot \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

Тогда: $\vec{F} = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$

$$\int\limits_{\gamma} P\,dx + Q\,dy =$$

кр. инт-л 2-го рода

$$= \int\limits_{\gamma} \langle \vec{F}, \hat{\tau} \rangle \, dl$$

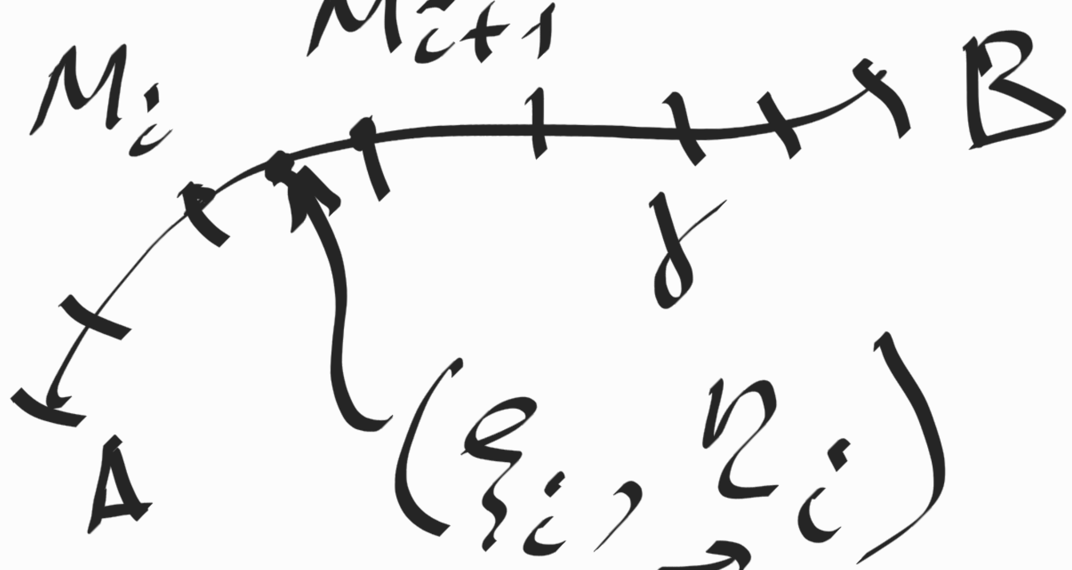
Кр. инт. 1-го рода

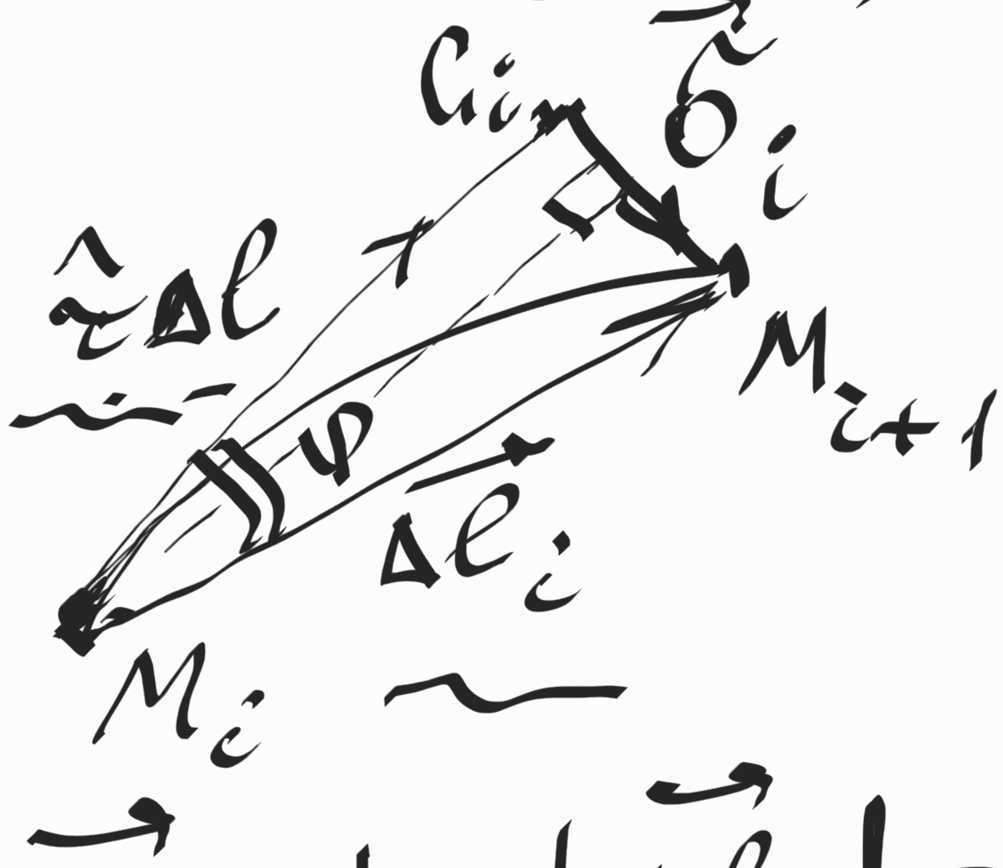
Пояснение: (Д-во)

$\forall$ интегральную сумму

$$S_N = \sum_{i=0}^{N-1} \left(P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i + \right.$$

$$+ Q(\xi_i, \eta_i)\,\Delta y_i\big) =$$





$$|\overrightarrow{M_iG_i}| = |\overrightarrow{\Delta l_i}| = \Delta l_i$$

$$|\vec{\sigma}_i| = 2\Delta l_i \sin\frac{\varphi}{2}$$

$$\frac{|\vec{\delta}_i|}{|\Delta \vec{l}_i|} = 2\sin\frac{\varphi}{2} \xrightarrow[\max|\Delta l_i| \to 0]{} 0$$

Т.о., переходя к пределу в интегральной сумме S_N, получим:

$$S_N = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\vec{F}(\xi_i, \eta_i), \hat{\tau}_i\right) \cdot$$

$$\cdot \Delta l_i + o(1) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[\substack{\max|\Delta \vec{l}_i| \to 0 \\ N \to \infty}]{} \int\limits_{\gamma} \langle \vec{F}, \hat{\tau} \rangle \, dl \; . \quad \blacksquare$$

Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода.

$\exists\ \gamma$ - дифференцируемая кривая (на плоскости)

$$\gamma: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [t_0, t_1].$$

∃ ориентация γ согласована с направлением обхода.

<u>Тогда</u>:

<u>Утверждение</u>:

$$\begin{cases} \int\limits_{\gamma} P\,dx + Q\,dy = \\ = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\tilde{P}(t)\,x'(t) + \tilde{Q}(t)\,y'(t)\right)dt, \end{cases}$$

где $\left.\begin{array}{l} \tilde{P}(t) = P(x(t), y(t)), \\ \tilde{Q}(t) = Q(x(t), y(t)) \end{array}\right\}.$

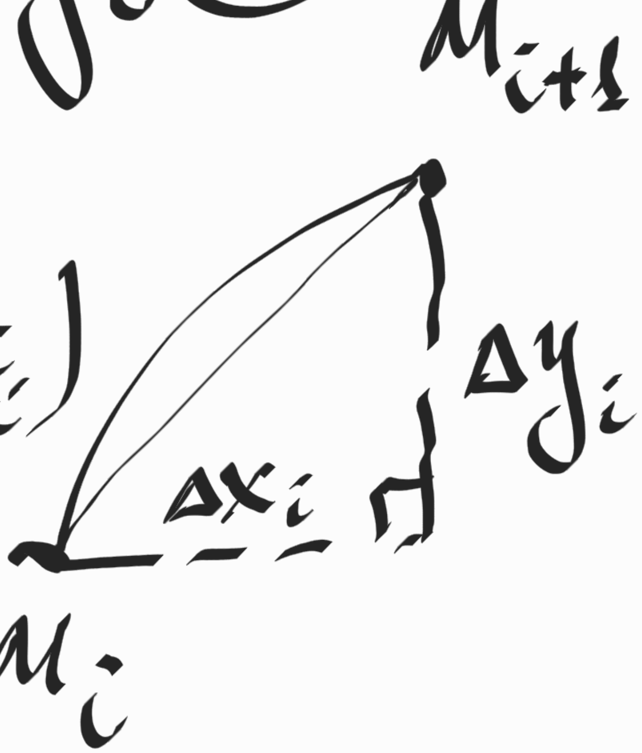
<u>Доказательство</u>:

$$+\sum_{i=0}^{N-1}\left(P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i +\right.$$

$$\left.+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i\right) =$$

$$M_i = M_i\left(x(t_i), y(t_i)\right)$$

$$\forall\, i = 0, 1, \ldots, N-1.$$



$$= \sum_{i=0}^{N-1}\left\{P(\xi_i,\eta_i)\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} +\right.$$

$$\left.+Q(\xi_i,\eta_i)\frac{\Delta y_i}{\Delta t_i}\right\}\Delta t_i =$$

$\exists$ γ-дифференцируемое отображение, тогда:

$$\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} = x'(t_i) + O(\Delta t_i)$$

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta t_i} = y'(t_i) + O(\Delta t_i)$$

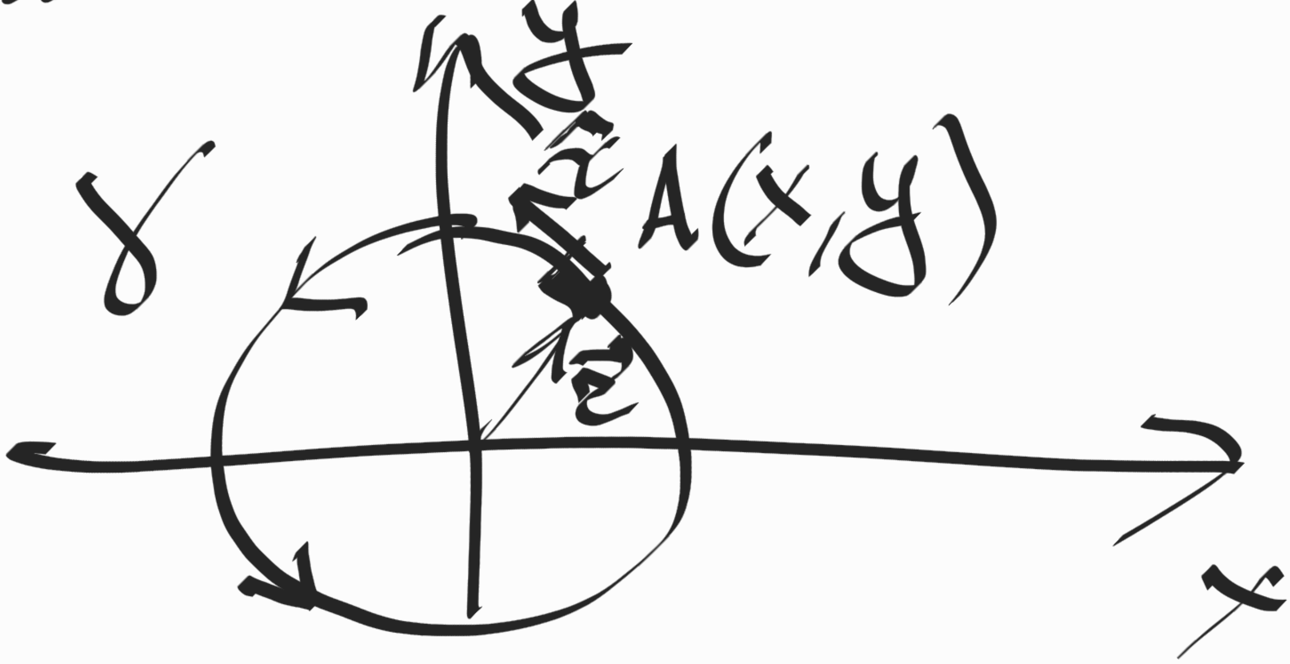
$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ P(\xi_i, \eta_i) x'(t_i) + Q(\xi_i, \eta_i) y'(t_i) \right\} \Delta t_i +$$

$$+\, o(1) \xrightarrow[\max_i \Delta l_i \to 0]{N \to \infty}$$

$$\to \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \tilde{P}(t)\, x'(t) + \tilde{Q}(t)\, y'(t) \right\} dt \quad \blacksquare$$

Пример:

Найти работу поля $\vec{F} = \vec{r}$ вдоль окружности $x^2 + y^2 = R^2$, ориентированной положительно.



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

<u>Решение</u>:

$$\gamma : \begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \end{cases},$$

$$\varphi \in [0, 2\pi).$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \end{pmatrix},$$

$$\vec{\tau} = \begin{pmatrix} x'(\varphi) \\ y'(\varphi) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

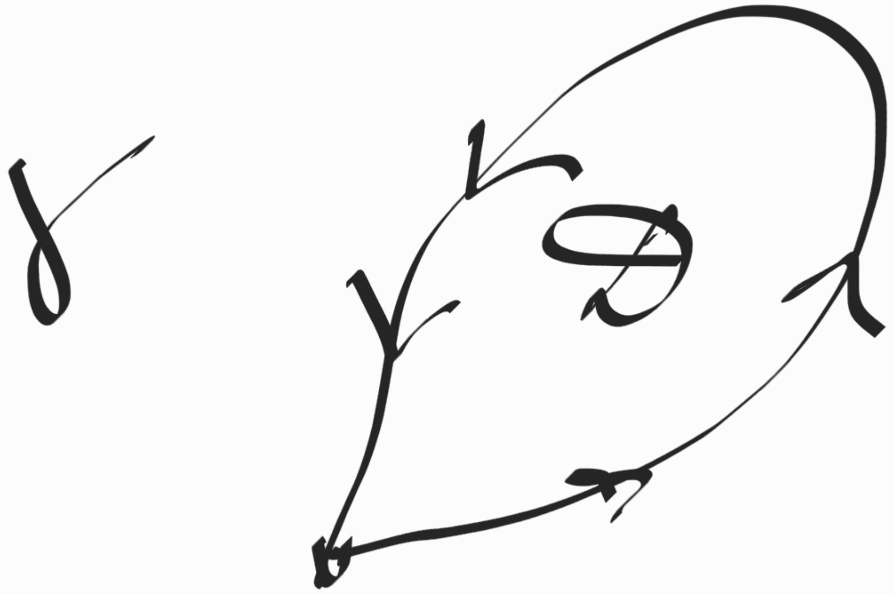
$$A = \int_{\gamma} \langle \vec{F}, \hat{\tau} \rangle \, dl =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big\langle \underbrace{\begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \end{pmatrix}}_{\vec{F}}, \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}}_{\vec{\tau}} \Big\rangle \underbrace{R\,d\varphi}_{dl} =$$

$$= R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \, \big(\cos\varphi(-\sin\varphi) + \sin\varphi\cos\varphi\big)$$

$= 0$ ∎

Формула Грина

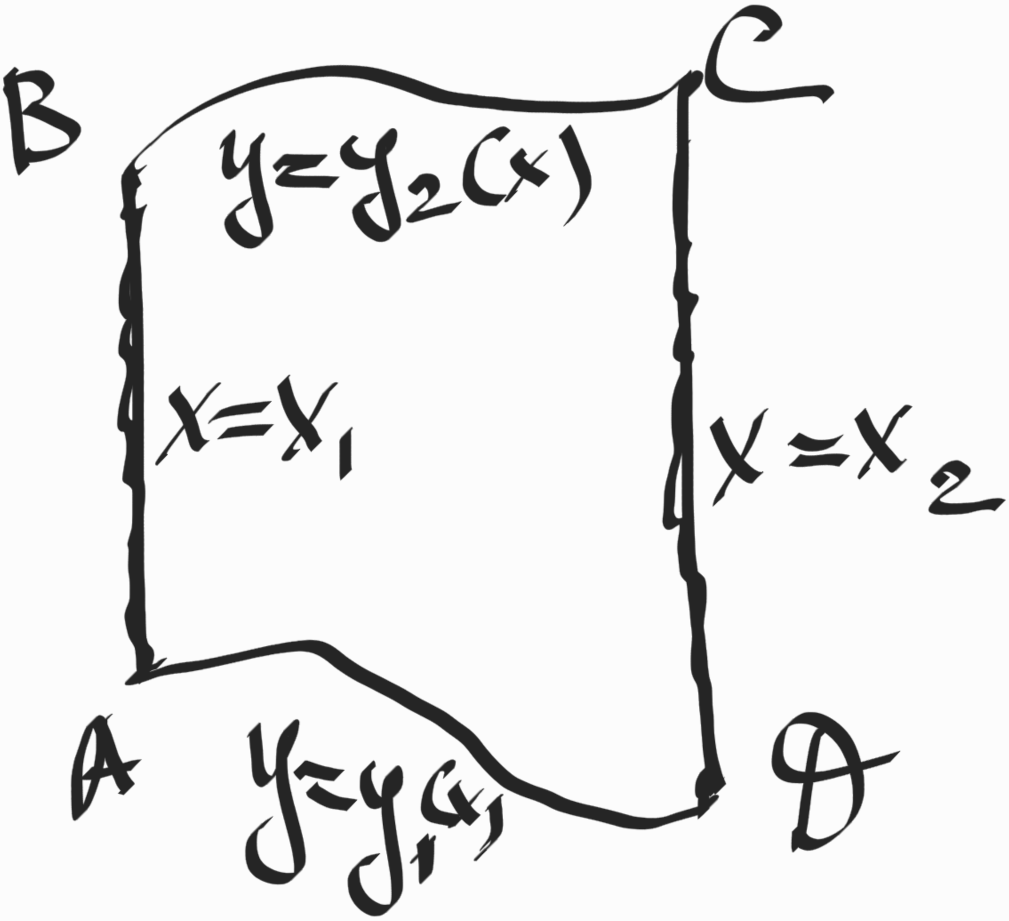


$\gamma = \partial D$ (граница области D)

Ф-ла Грина:

$$\oint_{\gamma} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Вычисление площадей :



$$S_{ABCD}=\int_{x_1}^{x_2}(y_2(x)-y_1(x))dx=$$

$$=\int_{\smile BC} y\,dx-\int_{\smile AD} y\,dx \;\equiv$$

$$* \int_{x_1}^{x_2} y_2(x)\,dx = \int_{\overset{\frown}{BC}} y\,dx\,,$$

$$\int_{\overset{\frown}{CD}} y\,dx = 0\,,$$

$$* \int_{x_1}^{x_2} y_1(x)\,dx = \int_{\overset{\frown}{AD}} y\,dx =$$

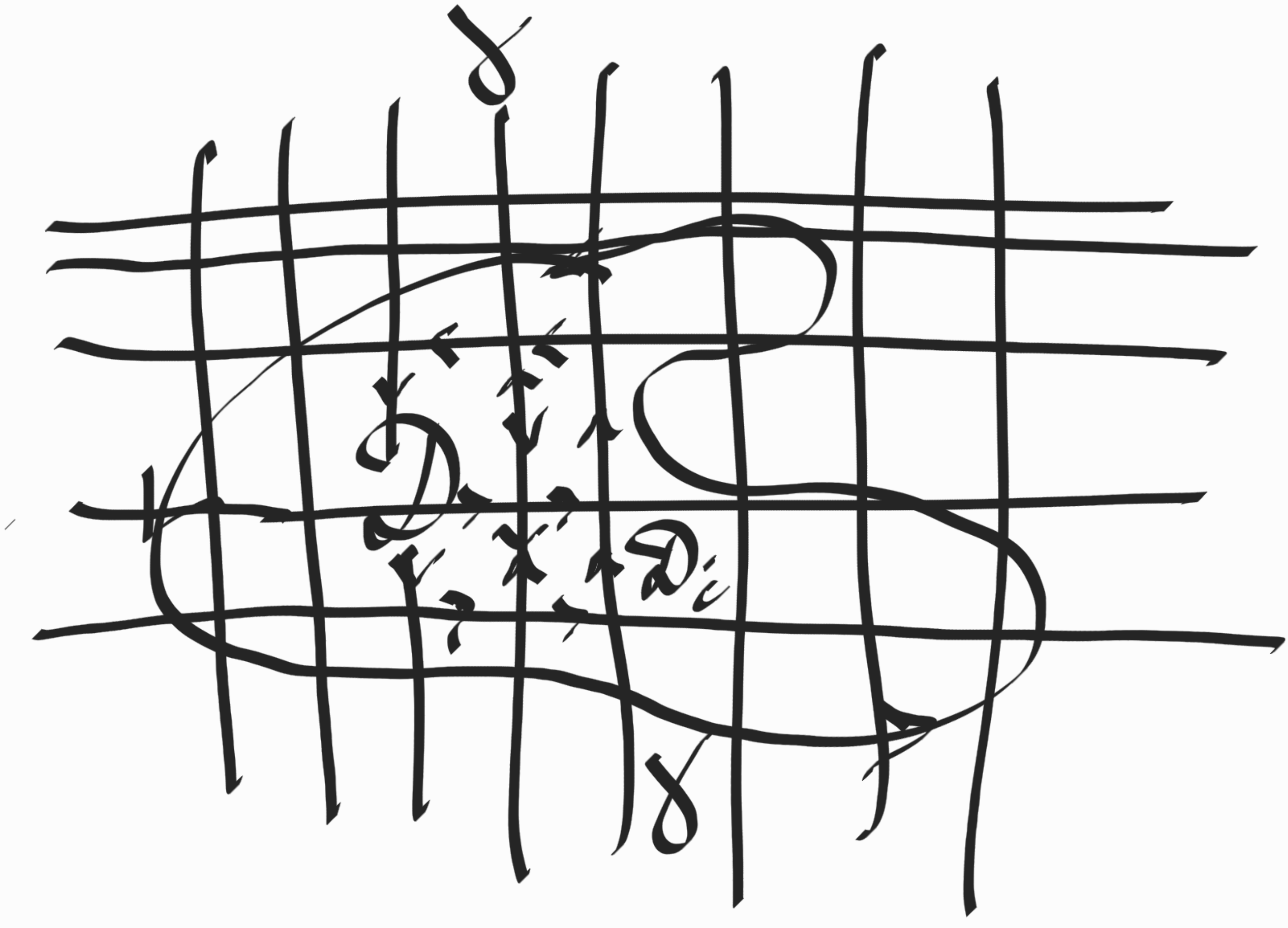
$$= -\int_{\overset{\frown}{DA}} y\,dx\,,$$

первое
св-во
кр. инт.
2-го рода

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} y\,dx = 0\,;$$

$$= -\left(\int\limits_{BC} + \int\limits_{CD} + \int\limits_{DA} + \int\limits_{AB} \right) y\,dx =$$

$$= -\oint\limits_{\gamma} y\,dx \,.$$



$$S = \iint\limits_{D} dx\,dy = \sum_i \iint\limits_{D_i} dx\,dy =$$

$$= -\sum_i \oint_{\gamma_i} y\,dx = -\oint_\gamma y\,dx, \quad (*)$$

$(\gamma_i \equiv \partial D_i)$, $\gamma \equiv \partial D$

Работает для произвольной области с достаточно сложной границей.

Будем параметризовать кривую γ переменной y и повторим приведенные выкладки:

$$S = \iint\limits_D dx\,dy = \oint\limits_\gamma x\,dy =$$

$$(*)\quad = \frac{1}{2}\oint\limits_\gamma x\,dy - y\,dx =$$

$$P \equiv -\frac{1}{2}y, \quad Q \equiv \frac{1}{2}x$$

$$= \oint\limits_\gamma P\,dx + Q\,dy.$$

Вычисление площади области с помощью криволинейного интеграла 2-го рода.

Пример:

Вычислить площадь эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Решение:

$$\gamma: \begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = b\sin\varphi \end{cases}, \quad \varphi\in[0,2\pi).$$

$$S=\frac{1}{2}\oint\limits_{\gamma} x\,dy - y\,dx =$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos\varphi\, b\cos\varphi -$$

$$- b \sin\varphi \, (-1) \, a \sin\varphi \,) \, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} a b \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi a b \quad \blacksquare$$

Доказательство формулы Грина.