Усреднение многомерного периодического эллиптического оператора на краю спектральной лакуны: операторные оценки в энергетической норме

Мишулович Арсений

В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассматривается эллиптический самосопряженный дифференциальный оператор второго порядка $\mathcal{A}_\varepsilon$, порожденный дифференциальным выражением

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \big(\omega^\varepsilon\big)^{-1}\mathbf{D}^* g^\varepsilon\, \mathbf{D}\big(\omega^\varepsilon\big)^{-1}, \quad \varepsilon > 0, \quad g := \widetilde{g}\omega^2, \quad \mathbf{D} = -i\nabla;$$
$$\omega^\varepsilon(\boldsymbol{x}) := \omega(\boldsymbol{x}/\varepsilon), \quad g^\varepsilon(\boldsymbol{x}) := g(\boldsymbol{x}/\varepsilon), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Здесь $\widetilde{g}$ — измеримая $\mathbb{Z}^d$–периодическая симметричная $(d \times d)$–матрица-функция с вещественными элементами; ω — измеримая $\mathbb{Z}^d$–периодическая функция, кроме того

$$c_0\mathbf{1} \leqslant \widetilde{g}(\boldsymbol{x}) \leqslant c_1\mathbf{1}, \quad 0 < c_0 \leqslant c_1 < \infty, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d,$$
$$\|\omega\|_{L_2(\Omega)} = 1, \quad 0 < \omega_0 \leqslant \omega(\boldsymbol{x}) \leqslant \omega_1 < \infty, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d,$$

где $\Omega := [0,1)^d$ — элементарная ячейка решетки $\mathbb{Z}^d$. Точное определение оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ дается через полуограниченную замкнутую в $L_2(\mathbb{R}^d)$ квадратичную форму.

Известно, что спектр оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ имеет зонную структуру: он является объединением замкнутых отрезков (спектральных зон). Зоны могут перекрываться. Между зонами могут открываться лакуны. Согласно гипотезе Бете-Зоммерфельда, в многомерном случае число лакун конечно.

Множество

$$\mathcal{H}^1_\varepsilon(\mathbb{R}^d) := \Big\{u \in L_2(\mathbb{R}^d) : \big(\omega^\varepsilon\big)^{-1}u \in H^1(\mathbb{R}^d)\Big\}$$

назовем “энергетическим пространством”; это гильбертово пространство относительно нормы $\|u\|_{\mathcal{H}^1_\varepsilon(\mathbb{R}^d)} = \big\|\big(\omega^\varepsilon\big)^{-1}u\big\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}$.

В докладе будет описана аппроксимация резольвенты оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ в регулярной точке оператора, близкой к краю внутренней спектральной лакуны, по “энергетической” норме (т.е. по операторной норме из пространства $L_2(\mathbb{R}^d)$ в $\mathcal{H}^1_\varepsilon(\mathbb{R}^d)$).

Исследование поддержано Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075–15–2022–287 от 06.04.2022).