В. Э. Петров

ООО “ТВЭЛЛ”, г. Санкт-Петербург

Оператор сингулярного интегрирования. Новый взгляд.

Сингулярный интеграл по контуру Γ

$$U(t) = S[u](t) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{u(\zeta)}{\zeta - t}\, d\zeta, \quad t \in \Gamma$$

– давно известный инструмент комплексного анализа и важнейший аппарат в приложениях к механике, электродинамике, уравнениям теории потенциала и много чему еще. Поэтому число работ, посвященных изучению сингулярного оператора огромно. Казалось бы, места для получения содержательно новых результатов не осталось. Докладчик постарается, однако, предложить здесь совершенно новую концепцию. Причем это будет касаться как методической части – определения (!!!) и на новой основе доказательства известных (а попутно и новых) свойств интеграла типа Коши, так и новых подходов к решению различных уравнений.

Тяжелые и громоздкие теоремы из классических учебников (например, перемена порядка в повторных интегралах, в том числе, доказательство инволюции $S^{-1} = S$, формулы Сохоцкого, поведение синнгулярного интеграла в особенностях плотности и т.д.) у нас получатся практически в одну строчку.

Рассматривая, далее, сингулярный интеграл, как интегральное преобразование, мы напишем равенство Парсеваля, выведем выражение для свертки и на этом пути решим множество важных и красивых уравнений. Например,

$$\begin{aligned}
&u^2 + U^2 = f,\\
&u^3 + 3U^2u + \alpha u + \beta U = f,\\
&\alpha u^2 + \beta S[U^2] = f, \quad \alpha \neq \pm\beta\\
&u^2 \pm S[U^2] = f,
\end{aligned}$$

Наконец, мы покажем, что характеристическое линейное сингулярное уравнение

$$a(t)u(t) + b(t)U(t) = f(t)$$

является (после некоторой подготовки) сверткой для преобразования S, и для его решения не потребуется задача Римана.