Лекция 21.09.21

Замена переменных в тройном интеграле.

$$\triangle \iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\gamma} \tilde{f}(u,v,w) \left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| \cdot du\,dv\,dw$$

Отображение $\theta : \gamma \to V$

дифференцируемо :

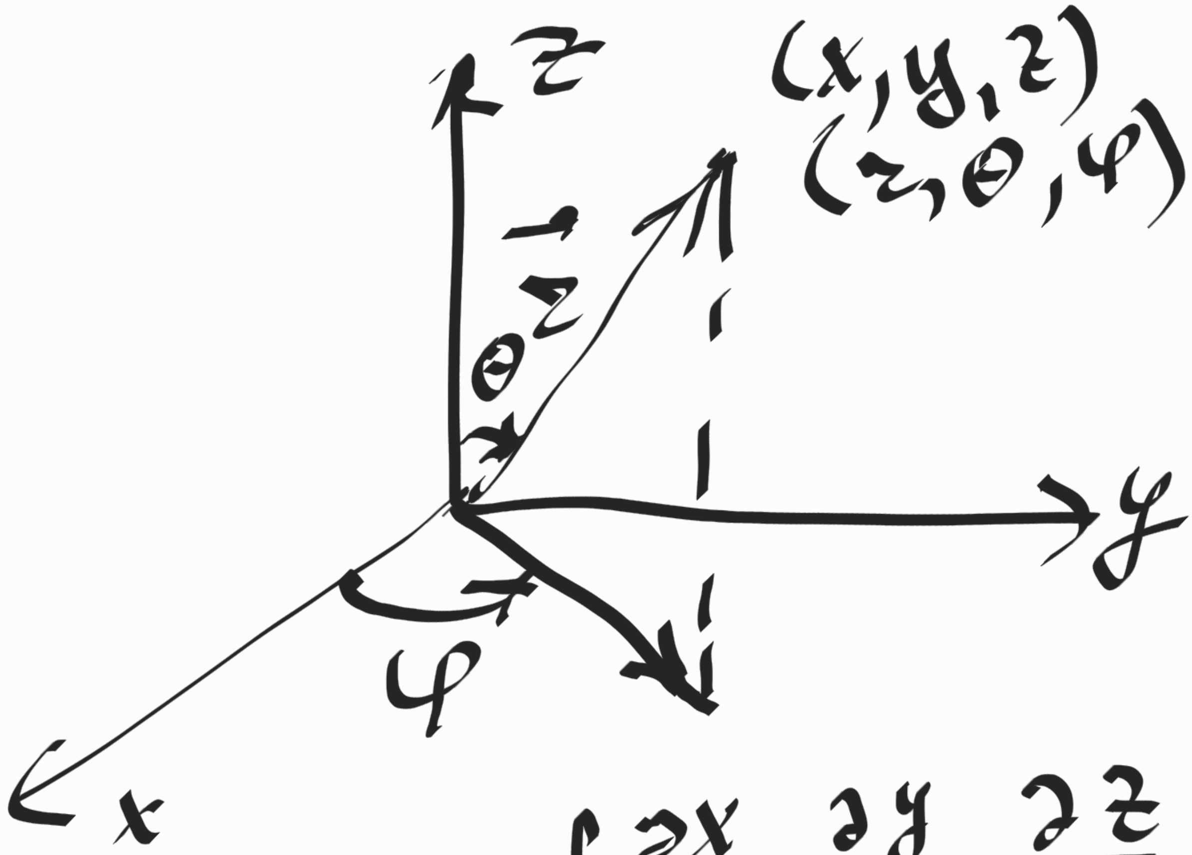
$$\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases}$$

$$\exists \ \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix},$$

$$\tilde{f}(u,v,w) \equiv f(x(u,v,w), \ y(u,v,w), \ z(u,v,w)).$$

<u>Пример</u>: (сферич. система координат).

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi & r \geq 0, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi & \theta \in [0, \pi], \\ z = r\cos\theta & \varphi \in [0, 2\pi). \end{cases}$$



$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \sin\theta\cos\varphi \cdot r^2\sin^2\theta\cos\varphi +$$

$$+ \sin\theta\sin\varphi \cdot r^2\sin^2\theta\sin\varphi +$$

$$+ \cos\theta\, r^2\left(\sin\theta\cos\theta\cos^2\theta +\right.$$

$$\left.+ \sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi\right) =$$

$$= r^2\sin^3\theta + r^2\sin\theta\cos^2\theta =$$

$$= r^2\sin\theta$$

Пример:

$$I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz =$$

$$V: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = R^2 & (1) \\ x^2+y^2 = z^2,\ z>0 & (2) \end{cases}$$

Решение:

Введем сферич. с-му координат:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

пов-ть (1)

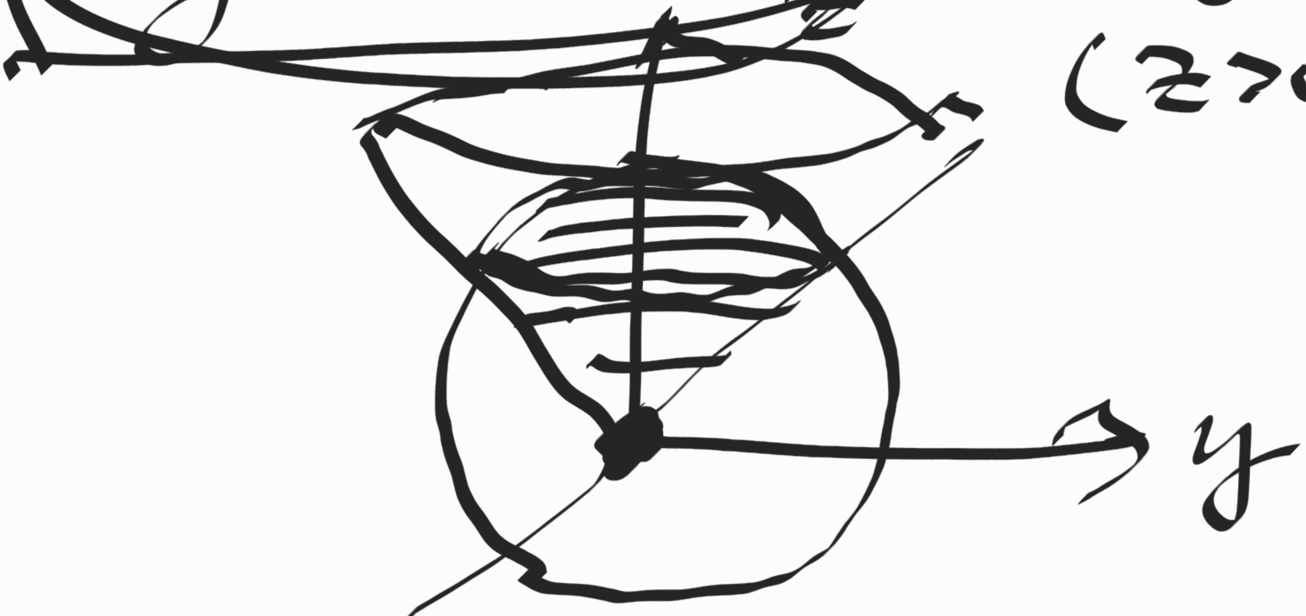
$(1) \Rightarrow r = R$

$(2) \Rightarrow r^2\sin^2\theta = r^2\cos^2\theta$

пов-ть (2)

$\operatorname{tg}^2\theta = 1 \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = 1$

$(z>0)$



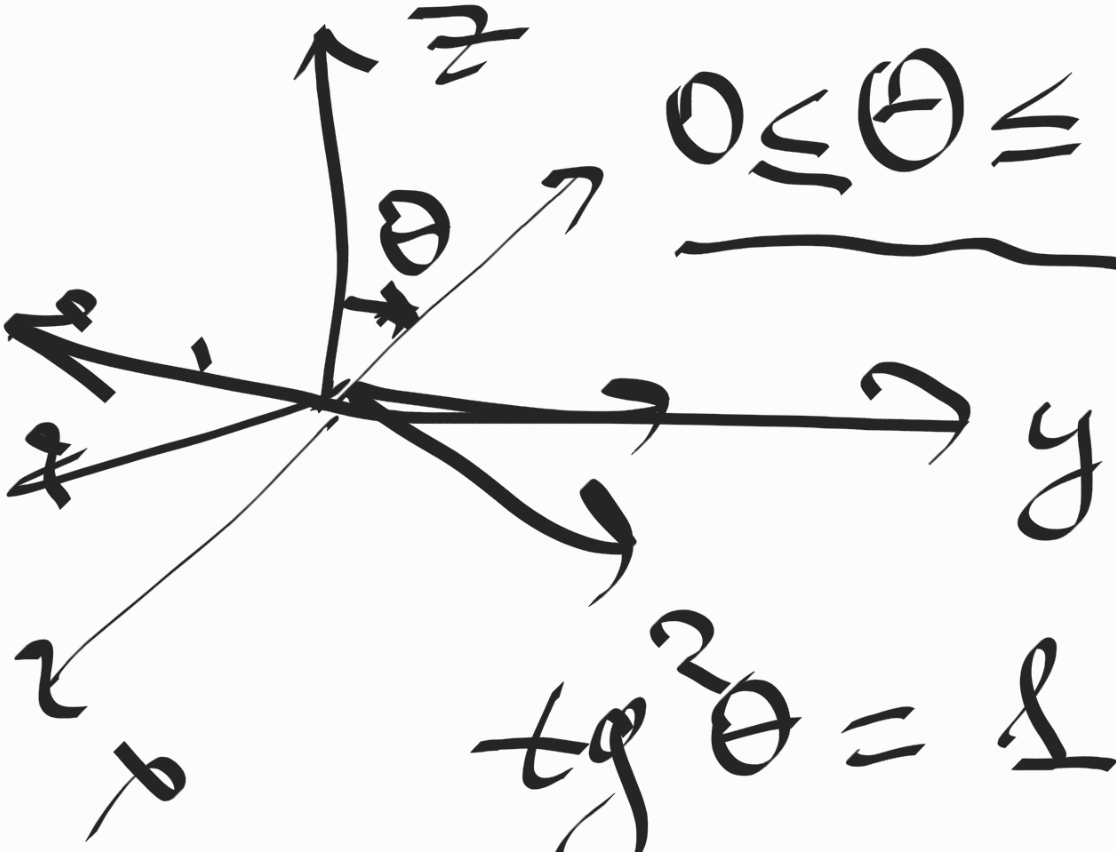
$\angle_x$ поскольку $z>0$

$$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \sin\theta \, d\theta \int_0^R r^2 dr \cdot r$$

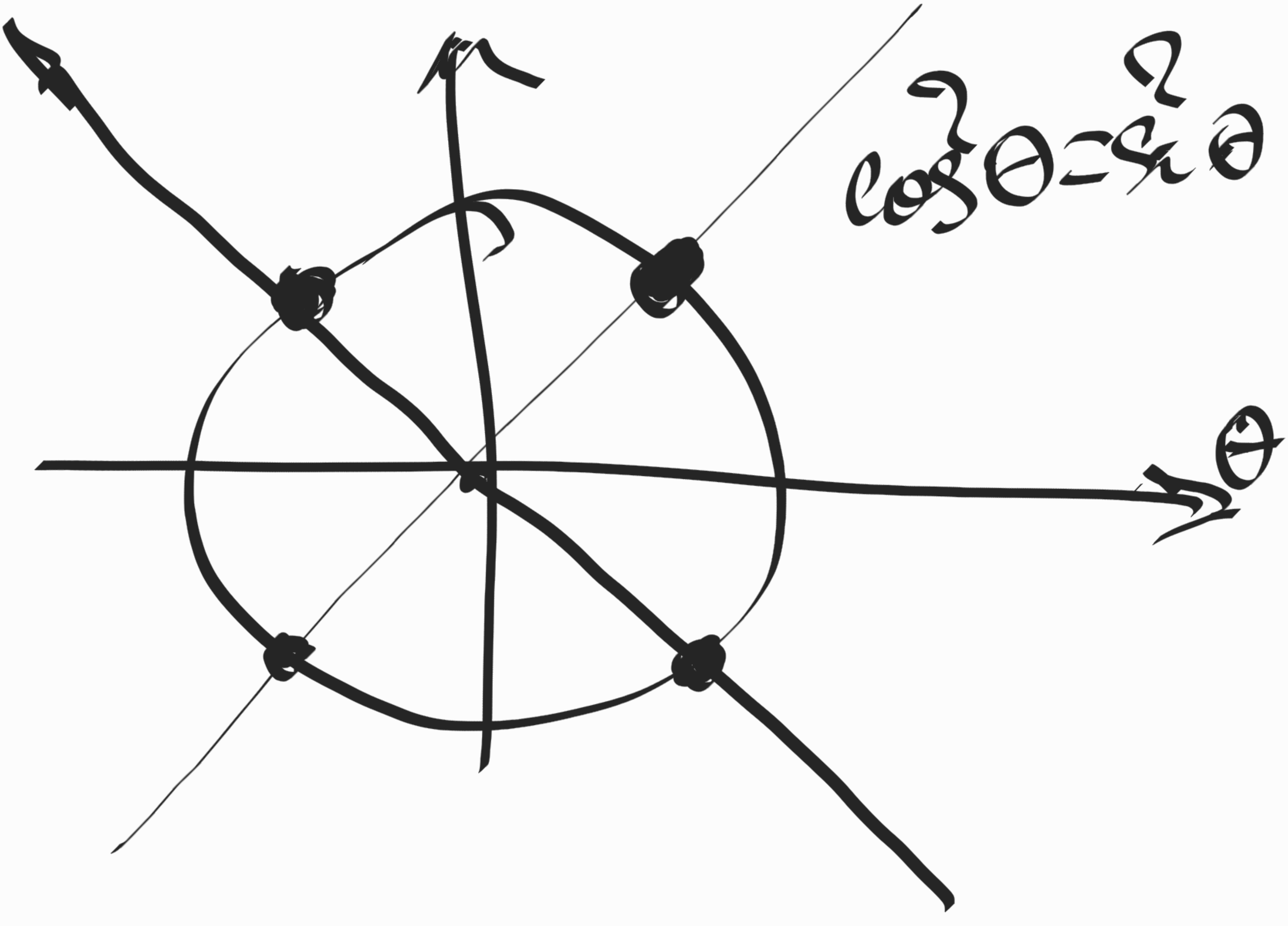
$$= 2\pi \frac{1}{4} R^4 \left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi/4} =$$

$$= \frac{\pi}{2} R^4 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

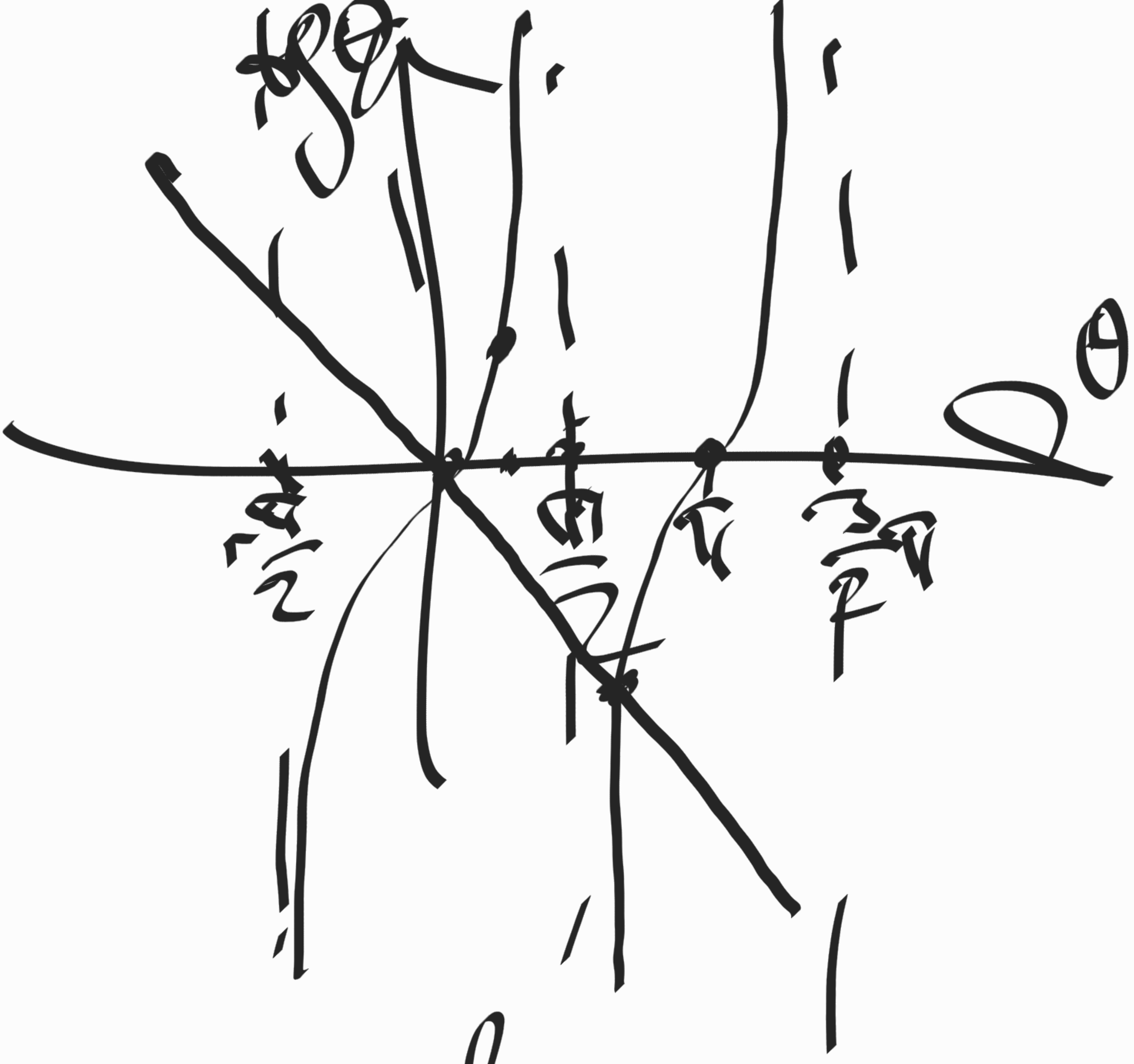


$$0 \leq \Theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$tg^2\Theta = 1$$



$$\cos^2\Theta = \sin^2\Theta$$



Несобственные кратные интегралы

интегралы по неограниченной области,

Пусть V - неограниченная область,
пусть f - интегрируема на $\forall$ ограниченном подмножестве $V' \subset V$
(f - локально интегрируема)
$\exists$ семейство областей $\{V_j\}_{j=1}^{\infty}$, так что:

1) $V_j \subset V$, $\forall j \geq 1$

2) $V = \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$

3) $V_{j+1} \supset V_j$

$\exists \quad \exists \iint\limits_{V_j} f(x,y)\,dx\,dy, \ \forall j \geq 1$

Тогда:

Если $\exists \lim\limits_{j\to\infty} \iint\limits_{V_j} f(x,y)\,dx\,dy =$

$= \iint\limits_{V} f(x,y)\,dx\,dy$

(несобств. интеграл от функции f по V).

Пример:

$$\forall \iint\limits_{\mathbb{R}^2 \setminus B_1} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha},$$

где B_1 — единичный круг

$$\forall \iint\limits_{1<r<j} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^{j} \frac{r\,dr}{r^{2\alpha}} =$$

$=$ (в полярной с-ме координат

$$\begin{cases} x = 2\cos\varphi \\ y = 2\sin\varphi \end{cases}$$

$$= 2\pi \left.\frac{r^{2-2\alpha}}{2-2\alpha}\right|_1^j = \frac{2\pi}{2-2\alpha}\left(j^{2-2\alpha} - 1\right)$$

$j \to \infty$

$\lim\limits_{j\to\infty} \exists$ при $\alpha > 1$

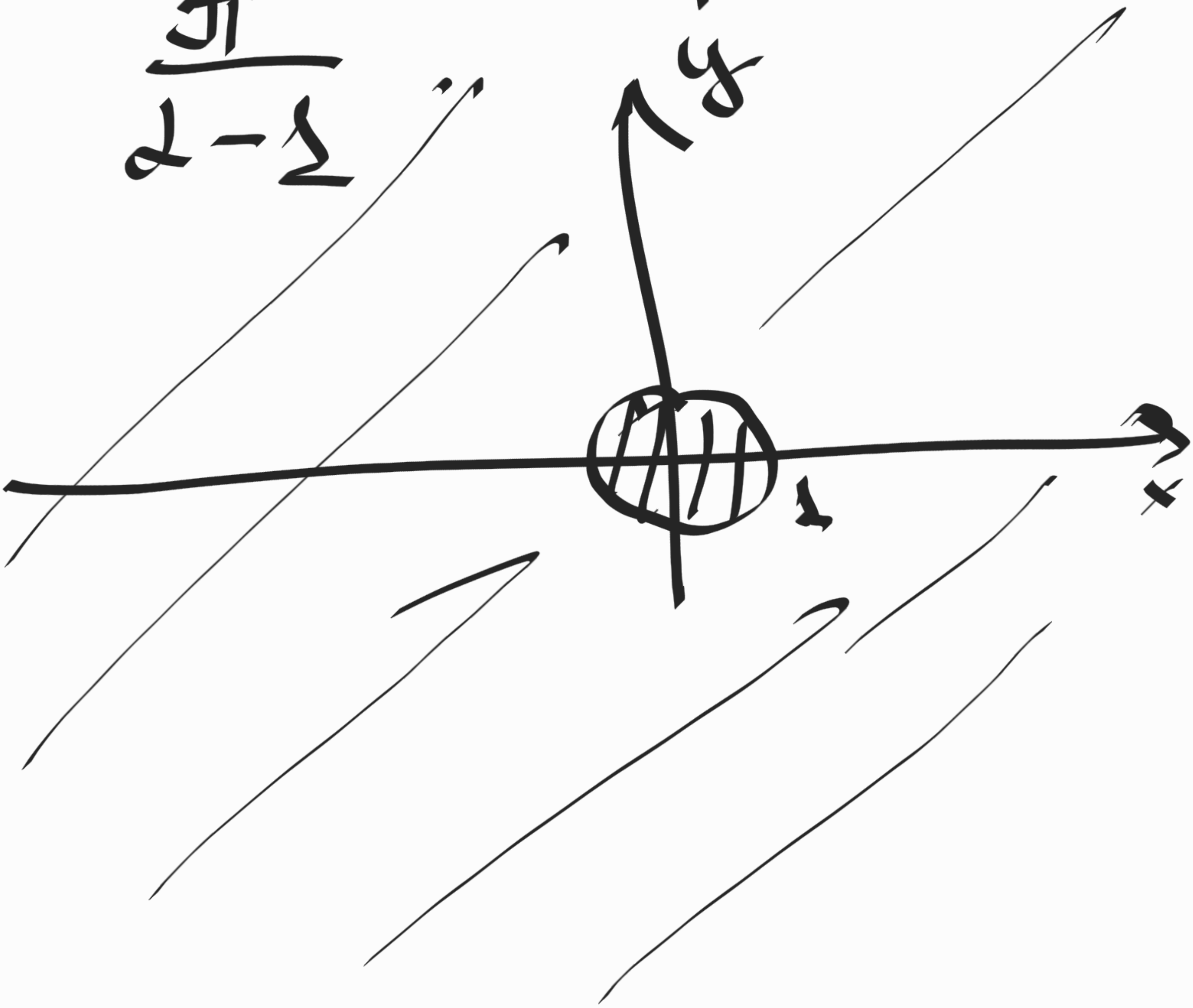
$$\to \frac{\pi}{\alpha - 1}$$

$\ast$ $\alpha = 1$

$$2\pi \int_1^j \frac{dr}{r} = 2\pi \ln j \xrightarrow[j\to\infty]{} \infty$$

Ответ: интеграл ∃ при $\alpha > 1$ и равен

$$\frac{\pi}{\alpha - 1}$$



Несобственный интеграл

по ограниченной области.

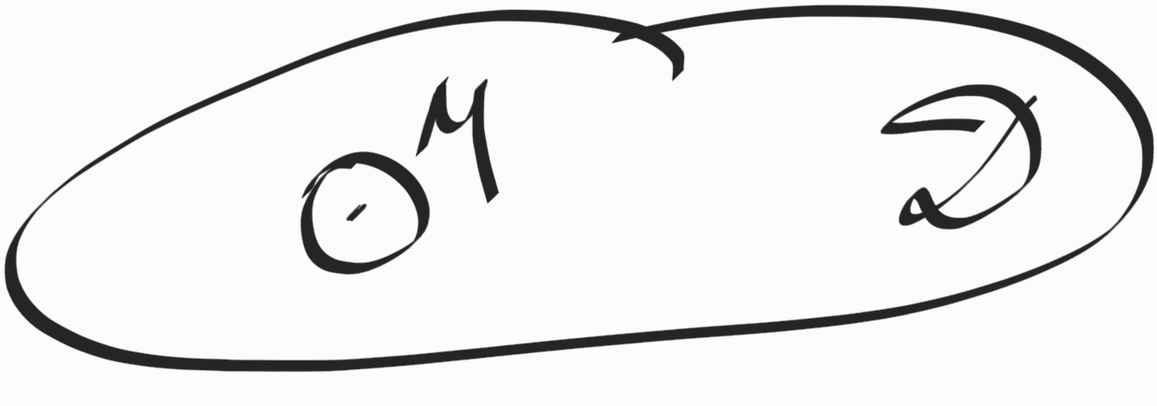
] V - ограниченная область,
f - ограничена в V всюду, кроме (·) M,
f - интегрируема на $V \setminus \{M\}$
(на $\forall$ ограниченной замкнутой $V' \subset V \setminus \{M\}$)

(на $\forall$ компактной области).

Пусть f определена в ограниченной области $D \setminus \{M\}$,

f – является неограниченной в точке M.

f – интегрируема на $\forall$ замкнутом ограниченном подмножестве $D' \subset D \setminus \{M\}$.



$\forall$ набор замкнутых ограниченных мн-в $\{D_j\}$ удовл-их условиям:

1) $D_j \subset D \setminus \{M\}$

2) $\bigcup\limits_j D_j = D$

3) $D_j \subset D_{j+1}$.

<u>Пример</u>: $D_j = D \setminus B_{\frac{1}{j}}(M)$

$B_{\frac{1}{j}}$ — шар радиуса $\frac{1}{j}$, def f интегрируема на D, если $\exists$

$$\lim_{j\to\infty} \iint_{D_j} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Пример:

$$\iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{\varepsilon^2 \le x^2+y^2 \le 1} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_\varepsilon^1 \frac{r\,dr}{r^{2\alpha}} =$$

$$= 2\pi \lim_{\varepsilon \to 0} \left. \frac{r^{2-2\alpha}}{2-2\alpha} \right|_\varepsilon^1 =$$

$$= \frac{\pi}{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(1 - \varepsilon^{2-2\alpha} \right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\pi}{1-\alpha}, & \alpha < 1 \\ +\infty, & \alpha > 1 \end{cases}$$

Пусть $\underline{\alpha = 1}$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{\varepsilon^2 \le x^2+y^2 \le 1} \frac{dx\,dy}{x^2+y^2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} 2\pi \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dr \cdot r}{r^2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} 2\pi \ln r \Big|_{\varepsilon}^{1} = +\infty.$$

<u>Ответ</u>: интеграл сходится при $\alpha < 1$, расходится при $\alpha \geq 1$.

Пример:

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \iiint\limits_{\varepsilon^2\le x^2+y^2+z^2\le 1} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha} =$$

(в сферич. коорд-ах)

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_\varepsilon^1 \frac{r^2\,dr}{r^{2\alpha}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} 4\pi \left.\frac{r^{3-2\alpha}}{3-2\alpha}\right|_\varepsilon^1 =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4\pi}{3-2\alpha}, & \alpha < \dfrac{3}{2} \\ +\infty, & \alpha \geq \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Ответ: интеграл сходится при $\alpha < \frac{3}{2}$, расходится при $\alpha \geq \frac{3}{2}$.