Лекция 14.09.21

Тройные интегралы (продолжение)

I: $V \subset \mathbb{R}^3$

f задана в V:

$(x, y, z) \longrightarrow f(x, y, z) \in \mathbb{R}$

I a) V – прямоуг. параллелепипед (брус)

$S_f(V)$ – верхняя сумма Дарбу

$s_f(V)$ – нижняя сумма Дарбу

σ – некоторое разбиение бруса

$r(\sigma)$ – ранг разбиения

def Если

$$\lim_{r(\sigma)\to 0} \left(S_f(V) - s_f(V) \right) = 0,$$

то f – интегрируема на V,

2) $\lim\limits_{\lambda(\sigma)\to 0} S_f(V) = \lim\limits_{\lambda(\sigma)\to 0} s_f(V) =$

$$= \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

(Тройной интеграл.)

б) V – произвольная область

$\exists$: V^* – брус, содержащий V.

Положим

$$f^* = \begin{cases} f(x,y,z), & (x,y,z) \in V \\ 0, & (x,y,z) \in V^* \setminus V \end{cases}$$

Тогда:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \overset{def}{\equiv}$$

$$\equiv \iiint\limits_{V^*} f^*(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Мы лишь должны потребовать, чтобы ∂V (граница области V)

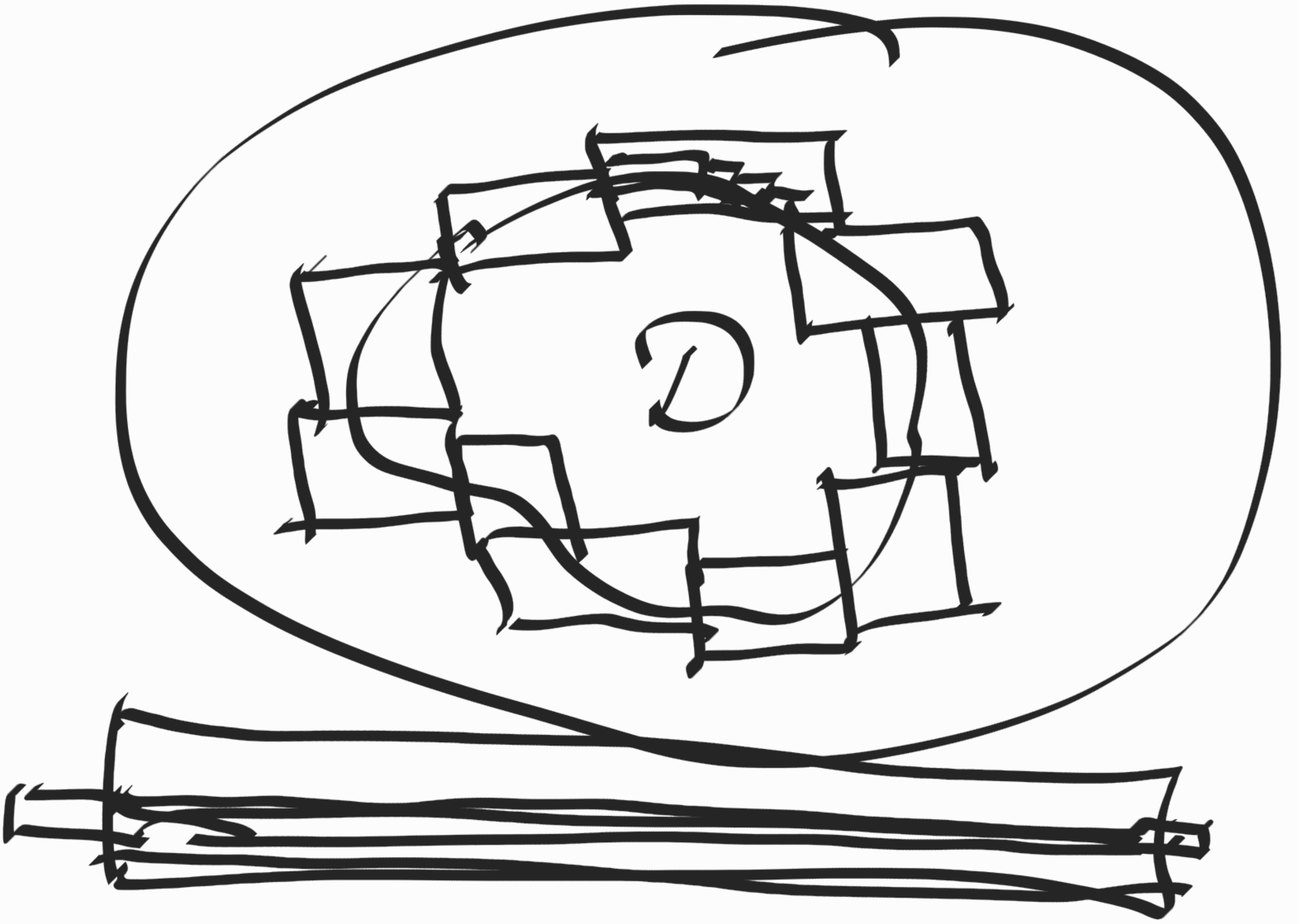
имела бы нулевой объем:

def

∂V имеет нулевой объем, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \{\Pi_i\}_{i=1}^{N}$,

$\partial V \subset \bigcup_i \Pi_i$, (1)

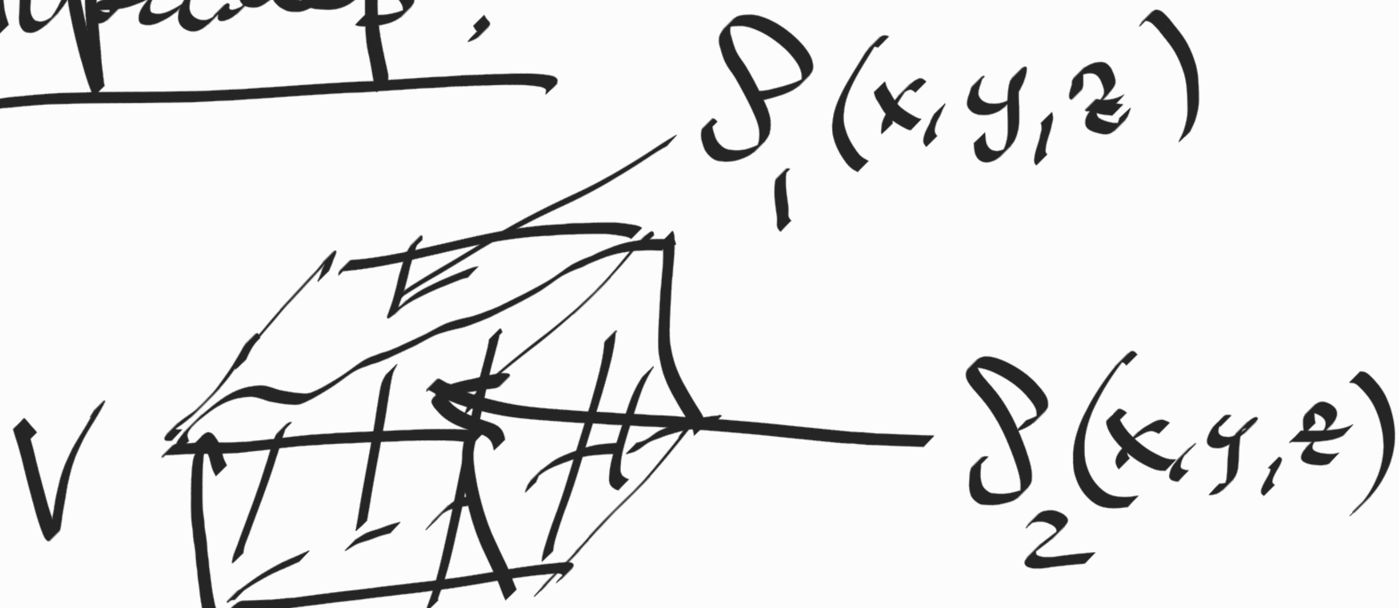
$\sum_i V(\Pi_i) < \varepsilon$. (2)



Классы интегрируемых функций.

1) непрерывные
2) кусочно-непрерывные (разрывы первого рода вдоль конечного числа поверхностей имеющих нулевой объем).

Пример:



(изменение скачком плотности кубиков, как сплава различных металлов),

Свойства тройного интеграла.

1) Аддитивность

$\exists$: $V = V_1 \cup V_2$,

$V_1 \cap V_2 = \emptyset$;

$\exists$; ∂V_1, ∂V_2 имеют нулевой объем,

$\mathcal{I}$: f интегрируема на V_1, V_2.

Тогда: $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

$= \left(\iiint\limits_{V_1} + \iiint\limits_{V_2} \right) f(x,y,z) \cdot$

$\cdot\, dx\,dy\,dz$

2) Линейность.

$\mathcal{I}$: f_1, f_2 интегрируемы на V,

$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Тогда $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)$

интегрируема на V и :

$$\iiint\limits_V (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \alpha_1 \iiint\limits_V f_1\,dx\,dy\,dz +$$

$$+ \alpha_2 \iiint\limits_V f_2\,dx\,dy\,dz$$

3) Монотонность :

Д: f_1, f_2 интегрируемы на V,

Д: $f_1 \le f_2$ $\forall (x, y, z) \in V$.

Тогда:

$$\iiint\limits_V f_1\,dx\,dy\,dz \le \iiint\limits_V f_2\,dx\,dy\,dz$$

$$f^* = \begin{cases} f, & (x,y) \in V \\ 0, & (x,y) \in V^* \setminus V \end{cases}$$

Геометрический

и физический смысл тройного интеграла.

1) Объем

$$V = \iiint\limits_V dx\,dy\,dz$$

2) Масса

$\exists\ \rho(x,y,z)$ – плотность, ρ задана на V.

$$M = \iiint\limits_V \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

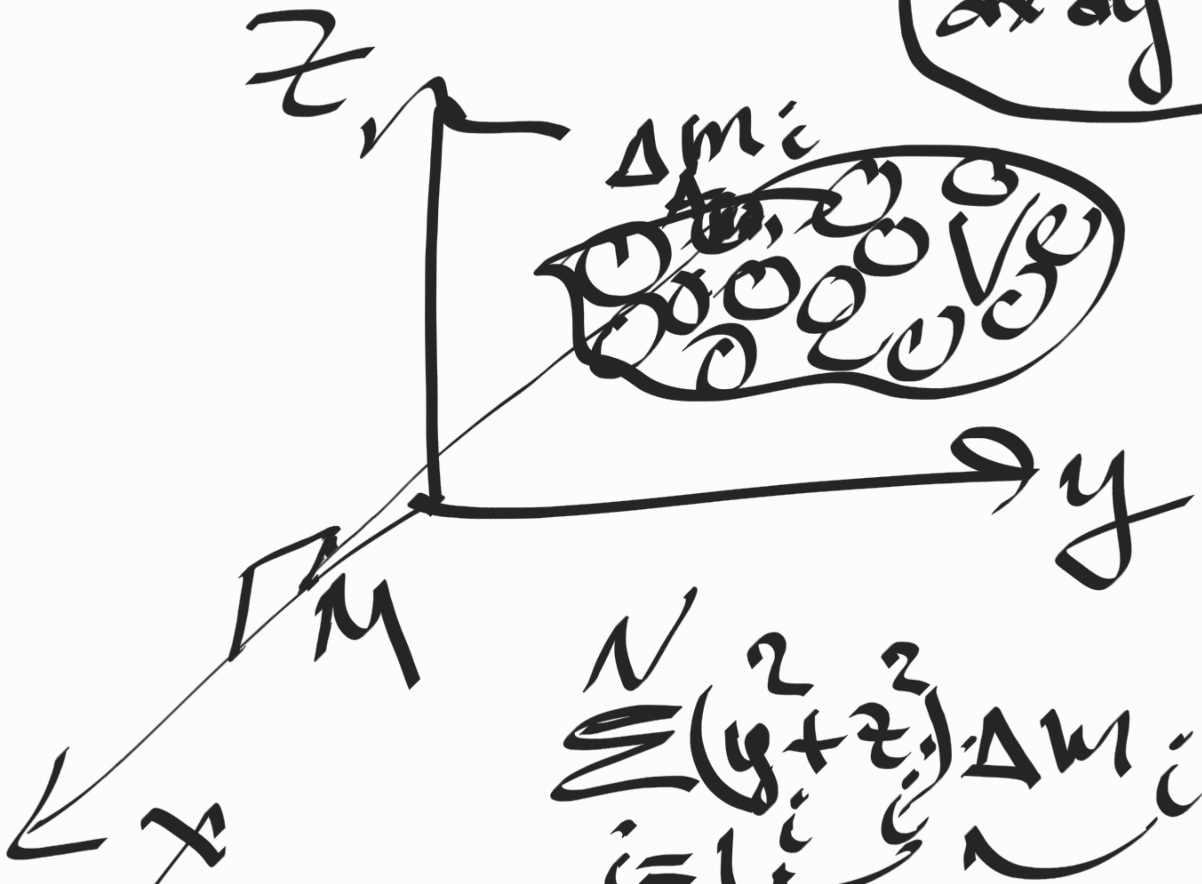
3) Координаты центра

тяжести

$$x_c = \frac{1}{M}\iiint\limits_V x\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

4) Момент инерции (относит. оси X).

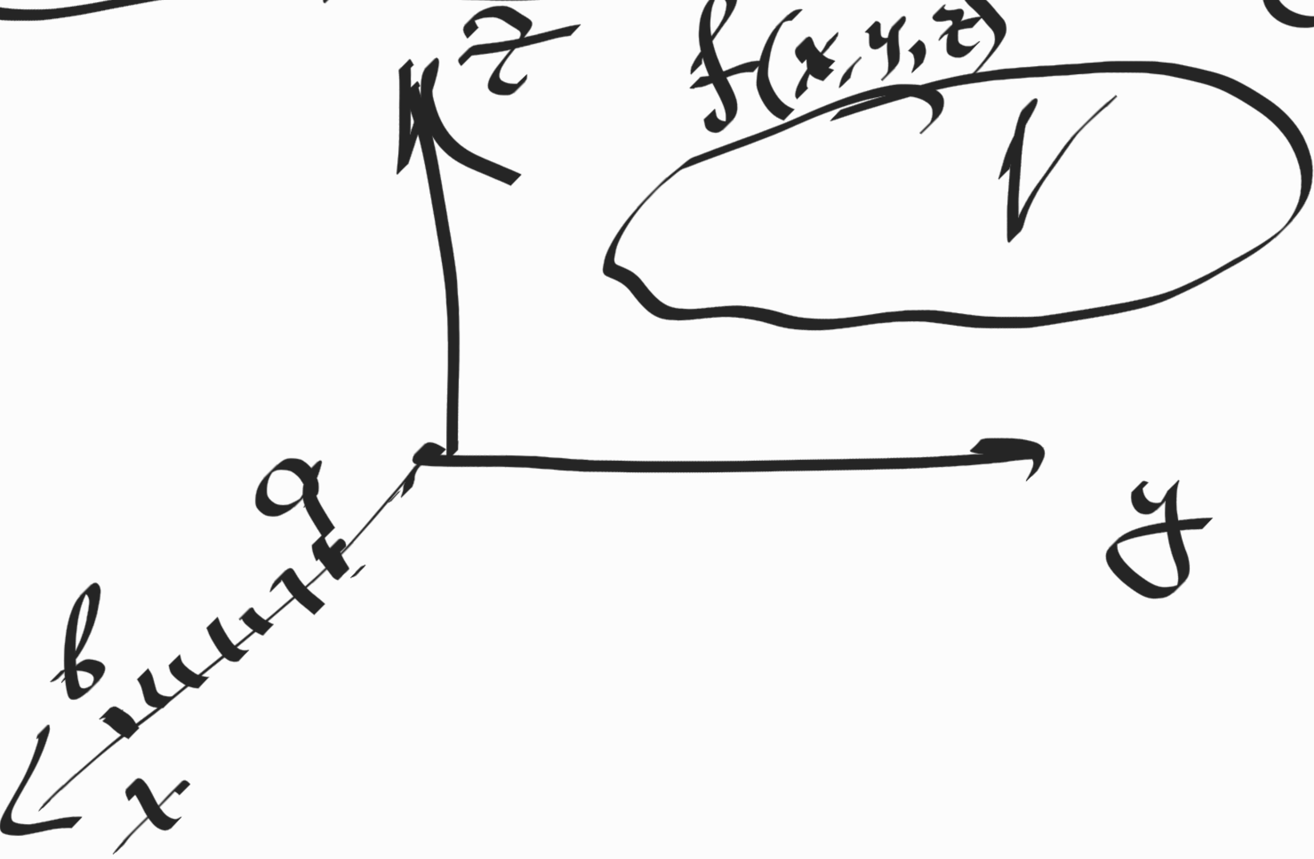
$$J_x \equiv \iiint\limits_V (y^2+z^2)\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$



$$\sum_{i=1}^{N}(y_i^2+z_i^2)\,\Delta m_i \Rightarrow$$

$$\underset{r(\delta)\to 0}{\Longrightarrow} \iiint\limits_V (y^2+z^2)\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Сведение тройного интеграла к повторному.



$V \subset \mathbb{R}^3$, f задана на V,

f интегрируема на V

Теорема 1 (Фубини):

] f интегрируема на V,

$\forall\, x \in [a, b]$ функция

$f(x, \cdot, \cdot)$ интегрируема

на области $D(x)$.

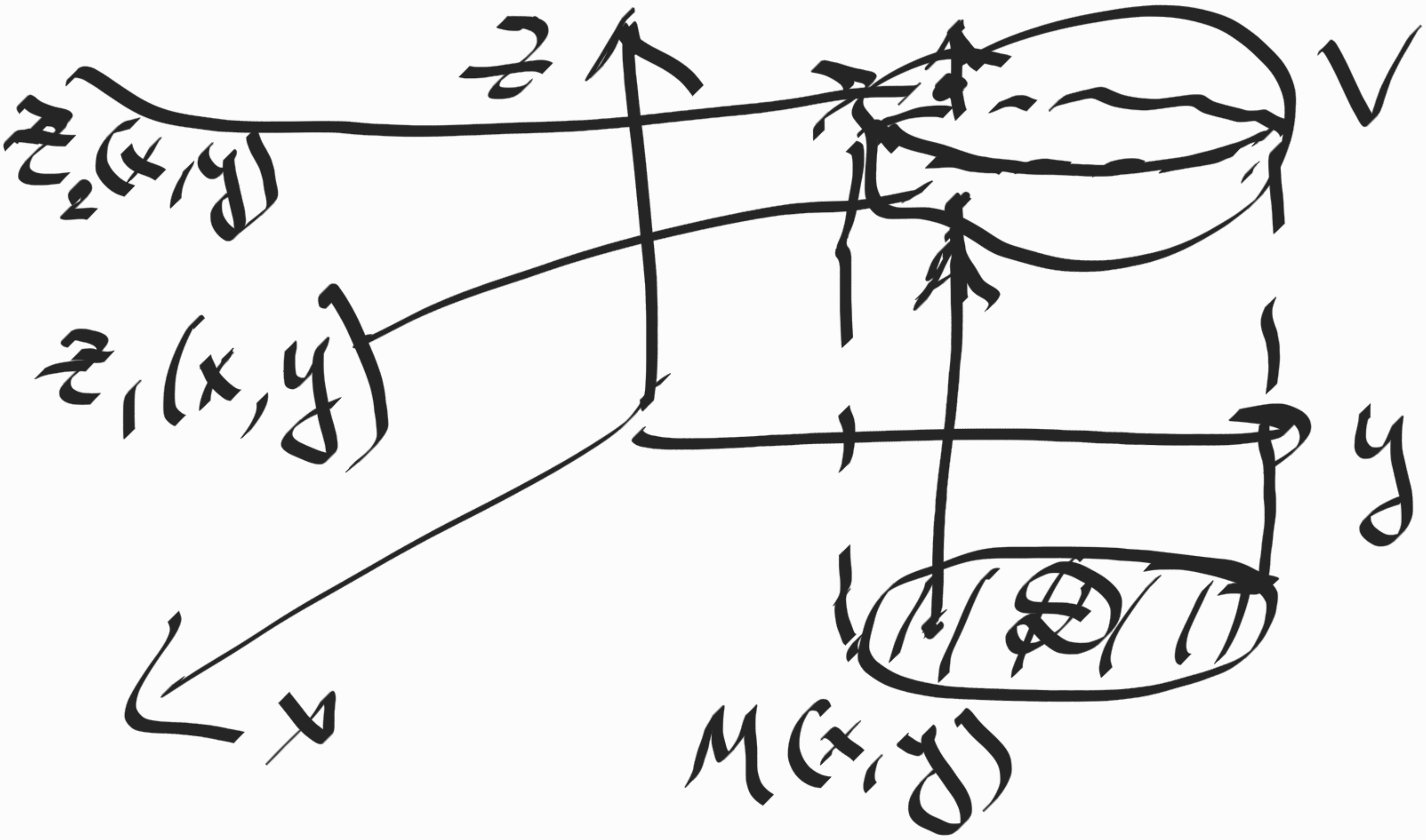
Тогда $\underbrace{\displaystyle\iint\limits_{D(x)} f(\cdot, y, z)\, dy\, dz}$

интегрируема на $[a, b]$

и: $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \underbrace{\iint\limits_{D(x)} f(x,y,z)\,dy\,dz}_{\overset{\shortparallel}{F(x)}}$

Теорема 2 (Фубини):

Пусть f интегрируема на V, $\forall (x,y) \in D$ функция $f(x,y,\cdot)$ интегрируема на $[z_1(x,y), z_2(x,y)]$.



Тогда функция

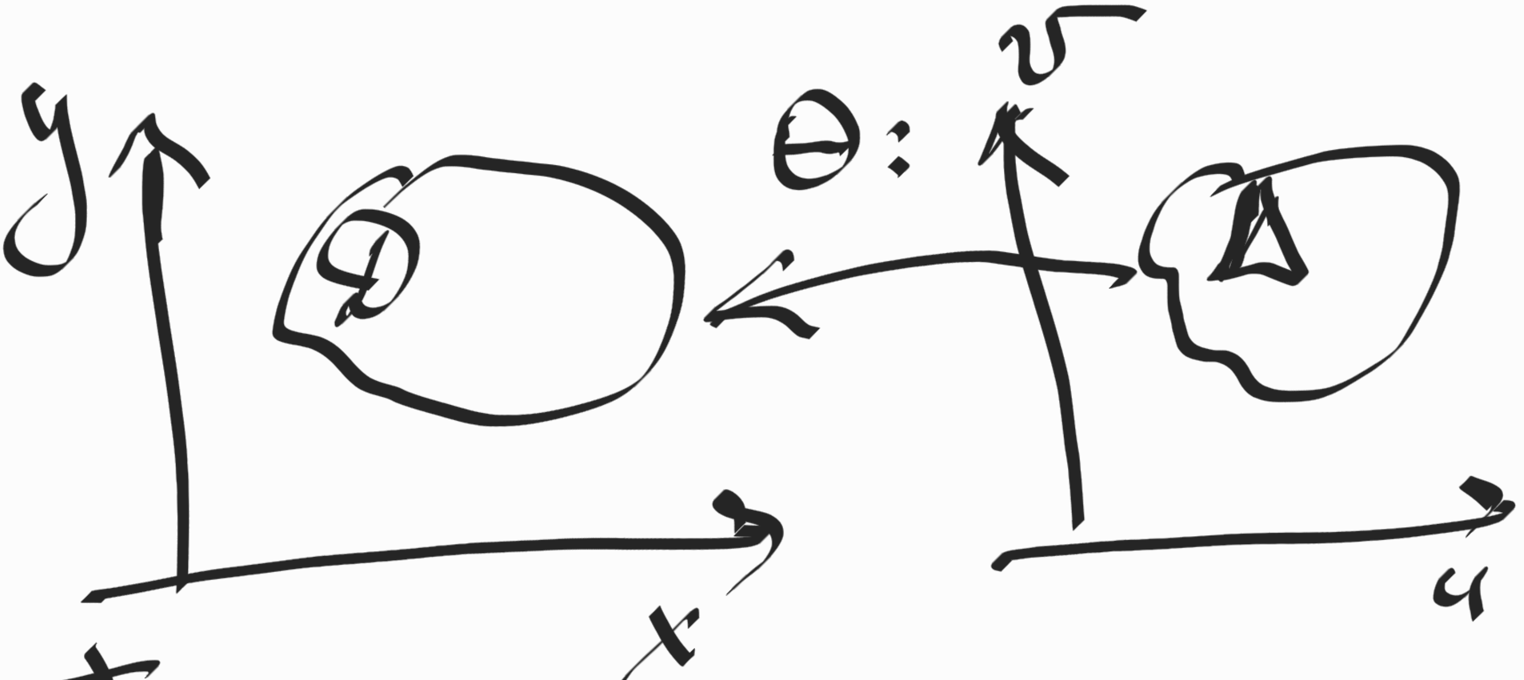
$$\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(\cdot,\cdot,z)\,dz$$

интегрируема на D и

$$\boxed{\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =}$$

$$= \iint\limits_{D} dx\,dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

§ 3 Замена переменных в кратных интегралах



Отображение Θ:

$$(u,v) \longrightarrow (x,y)$$

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

Def Отображение дифференцируемо, если дифференцируемы координатные функции.

$$\begin{cases} \Delta x = \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v + o\left(\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}\right), \\ \Delta y = \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v + o\left(\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}\right) \end{cases}$$

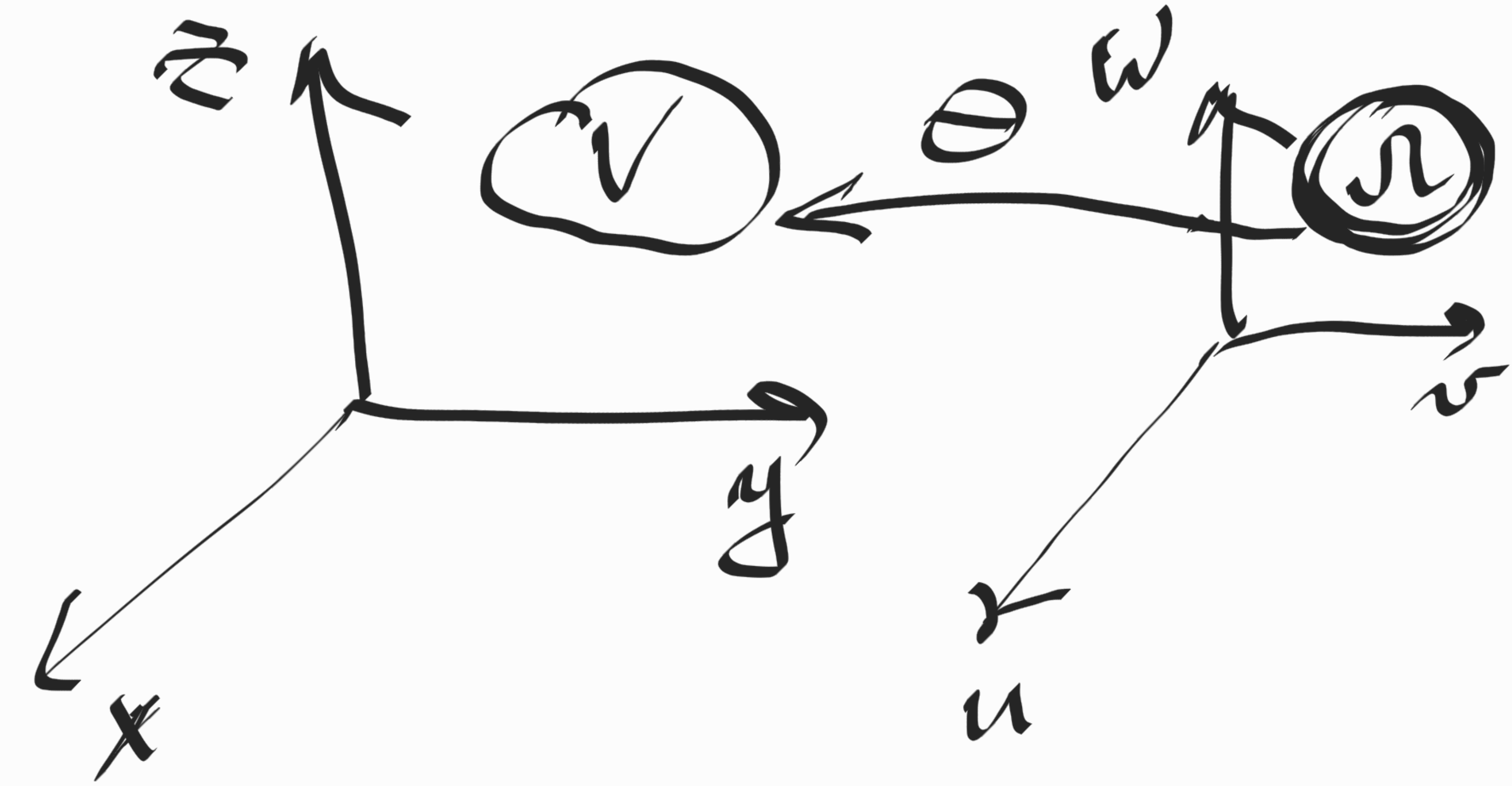
$$* \Delta\vec{\theta} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}, \quad \vec{h} = \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix}$$

$$\Delta\vec{\theta} = J_\theta \vec{h} + o\left(|\vec{h}|\right),$$

где

$$J_\theta = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \text{ — матрица Якоби}$$

$$\det J_\theta = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \text{ — якобиан}$$



Θ:

$$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$$

<u>def</u> отображение Θ

дифференцируемо, если

дифференцируемы

координатные функции:

$$\begin{cases} \Delta x = \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v + \frac{\partial x}{\partial \omega}\Delta \omega + \\ \quad + o\left(\sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2 + (\Delta \omega)^2}\right), \\ \Delta y = \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v + \frac{\partial y}{\partial \omega}\Delta \omega + \\ \quad + o\left(\sqrt{- - - -}\right), \\ \Delta z = \frac{\partial z}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial z}{\partial v}\Delta v + \frac{\partial z}{\partial \omega}\Delta \omega + \\ \quad + o\left(\sqrt{- - - -}\right). \end{cases}$$

$$\Delta\vec{\theta} = J_\theta \vec{h} + o(|\vec{h}|)$$

$$J_\theta = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix},$$

м-ца Якоби

$$\Delta\vec{\theta} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}, \quad \vec{h} = \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{pmatrix},$$

$$\det J_\theta = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}.$$

Якобиан

Геометрический смысл Якобиана дифференцируемого отображения.

$\exists\, \Theta : \Delta \to D$ – дифференцируемое отображение области в $\mathbb{R}^2$.

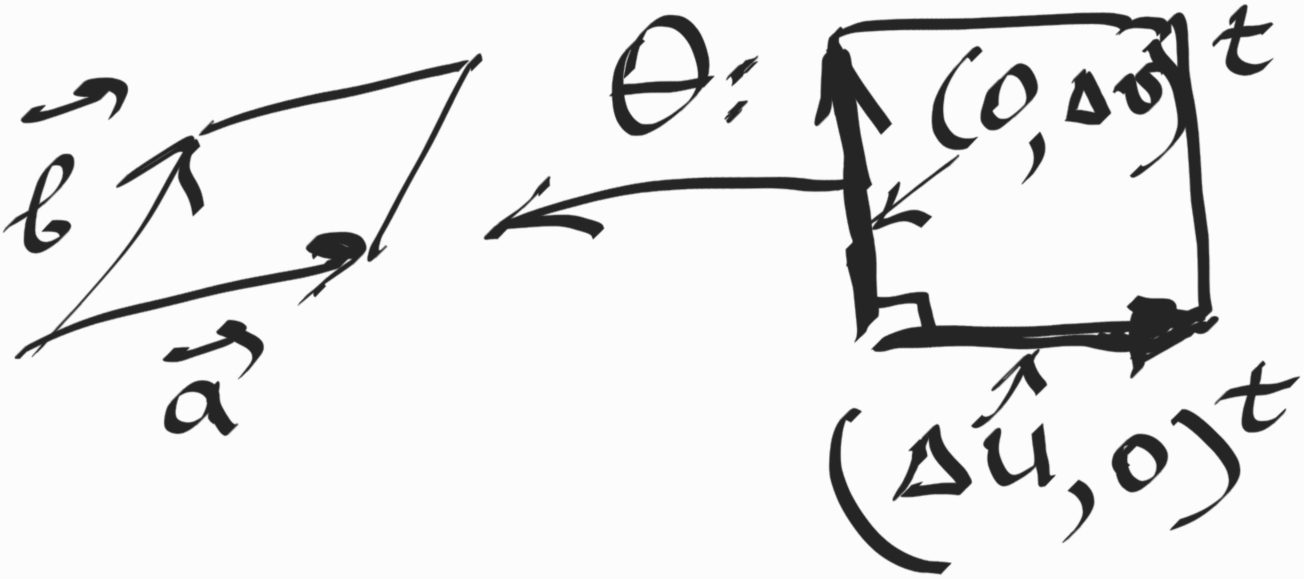
Утверждение:

$\exists\, \Delta$ – прямоугольник (брус)

Тогда: $S(D) = |\det J_\Theta| \cdot S(\Delta) + o\big(S(\Delta)\big)$

при $S(\Delta) \to 0$.

Доказательство:



$$\begin{cases} \Theta : \begin{pmatrix} \Delta u \\ 0 \end{pmatrix} \to \vec{a} \\ \Theta : \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta v \end{pmatrix} \to \vec{b} \end{cases}$$

$$\vec{a} = J_\Theta \begin{pmatrix} \Delta u \\ 0 \end{pmatrix} + o(\Delta u) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{pmatrix} \Delta u + o(\Delta u)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u \\ 0 \end{pmatrix} .$$

$$\vec{b} = J_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta v \end{pmatrix} + o(\Delta v) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \Delta v + o(\Delta v) ;$$