Лекция 7.09.21.

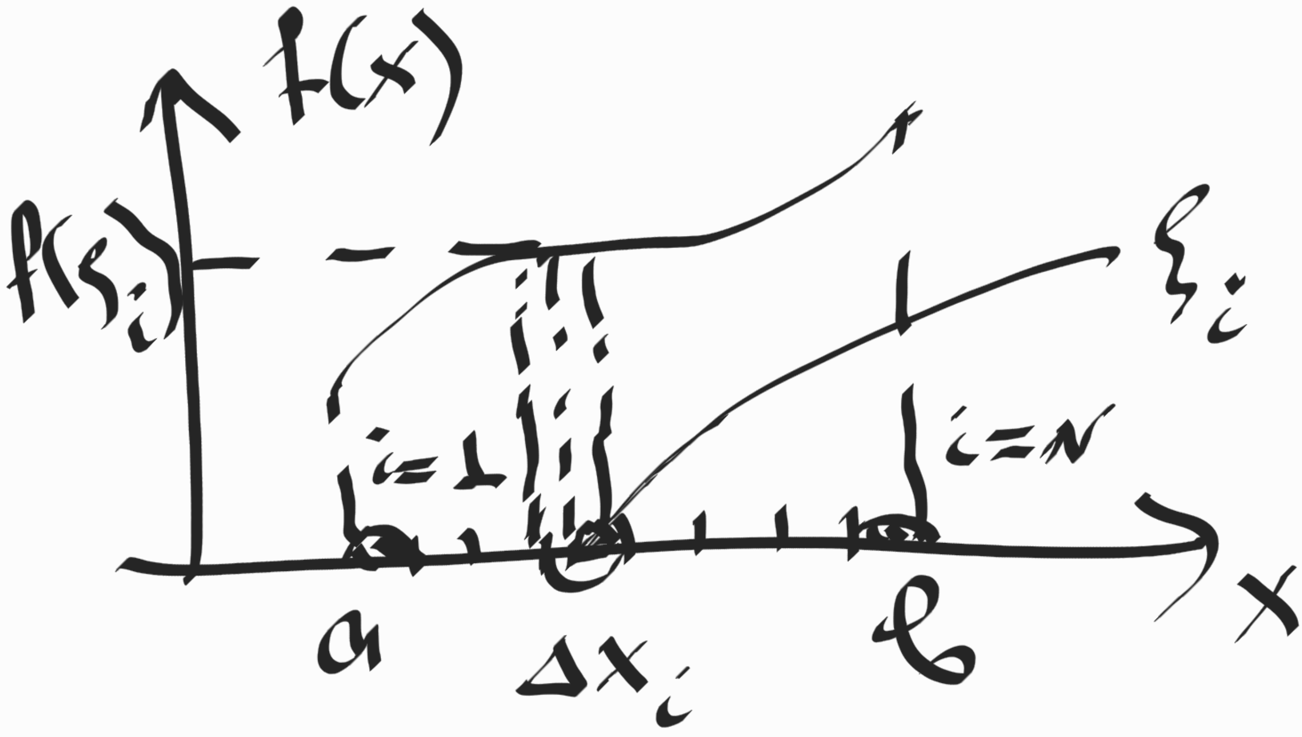
Кратные интегралы

§1. Двойной интеграл.

$$f : (x, y) \longmapsto f(x, y)$$

Мотивировка к определению двойного интегр

$\forall f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$

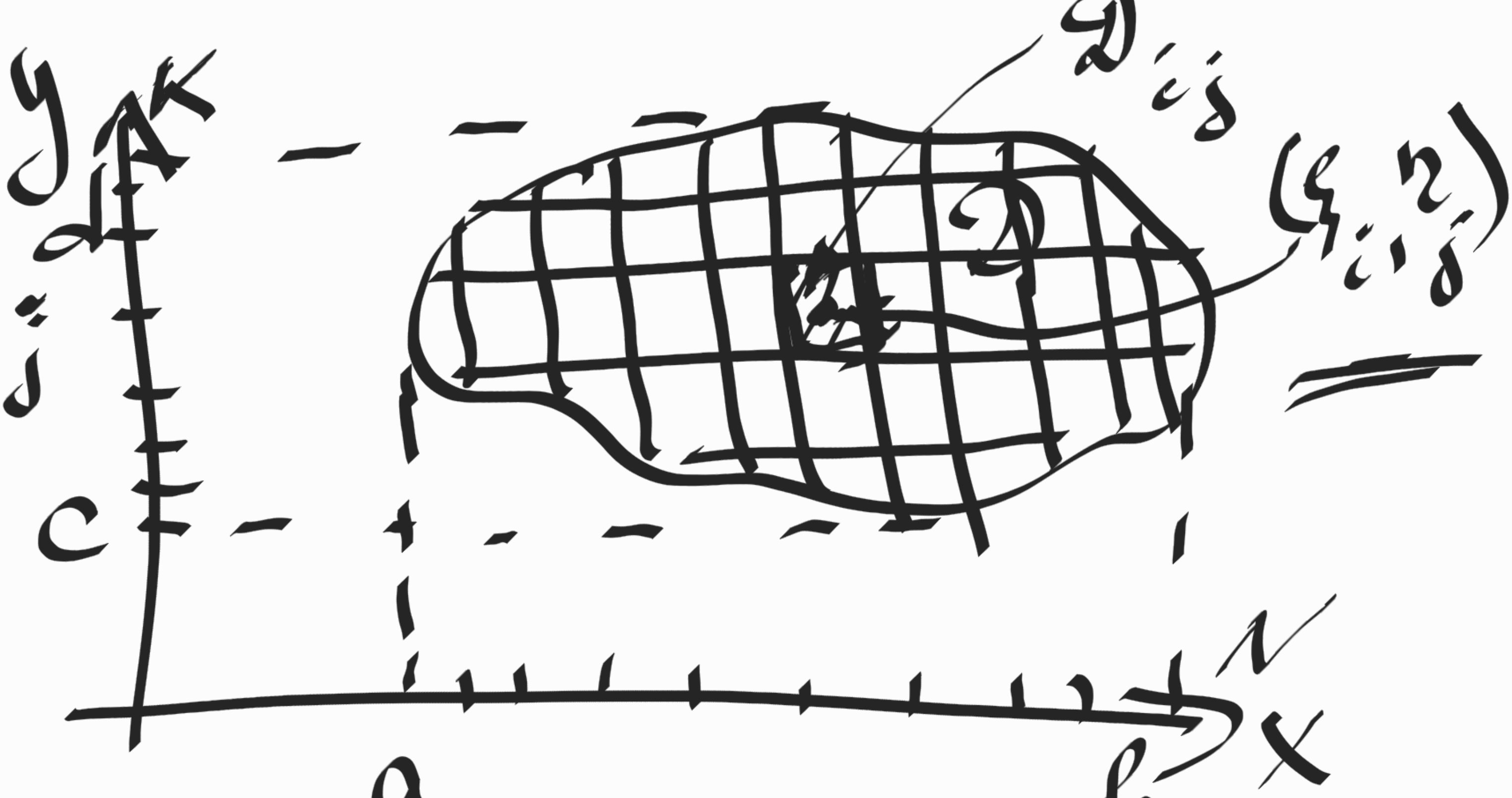


$i = 1, \ldots, N$

$$\forall \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i) \Delta x_i \xrightarrow[\max_i (\Delta x_i) \to 0]{} \int_a^b f(x)\,dx$$

$N \to \infty$ (интеграл Римана)

Двойной интеграл.



$i = 1, \dots, N$

$j = 1, \dots, K$

$\delta(x, y)$, $\delta(\xi_i, \eta_j)$

$\delta: (x, y) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$* \sum_{i,j} \rho(\xi_i, \eta_j) S(D_{ij}) \xrightarrow[\substack{\max\limits_i (\Delta x_i) \to 0 \\ \max\limits_j (\Delta y_j) \to 0 \\ N \to \infty,\ K \to \infty}]{} \iint\limits_D \rho(x,y)\,dx\,dy$$

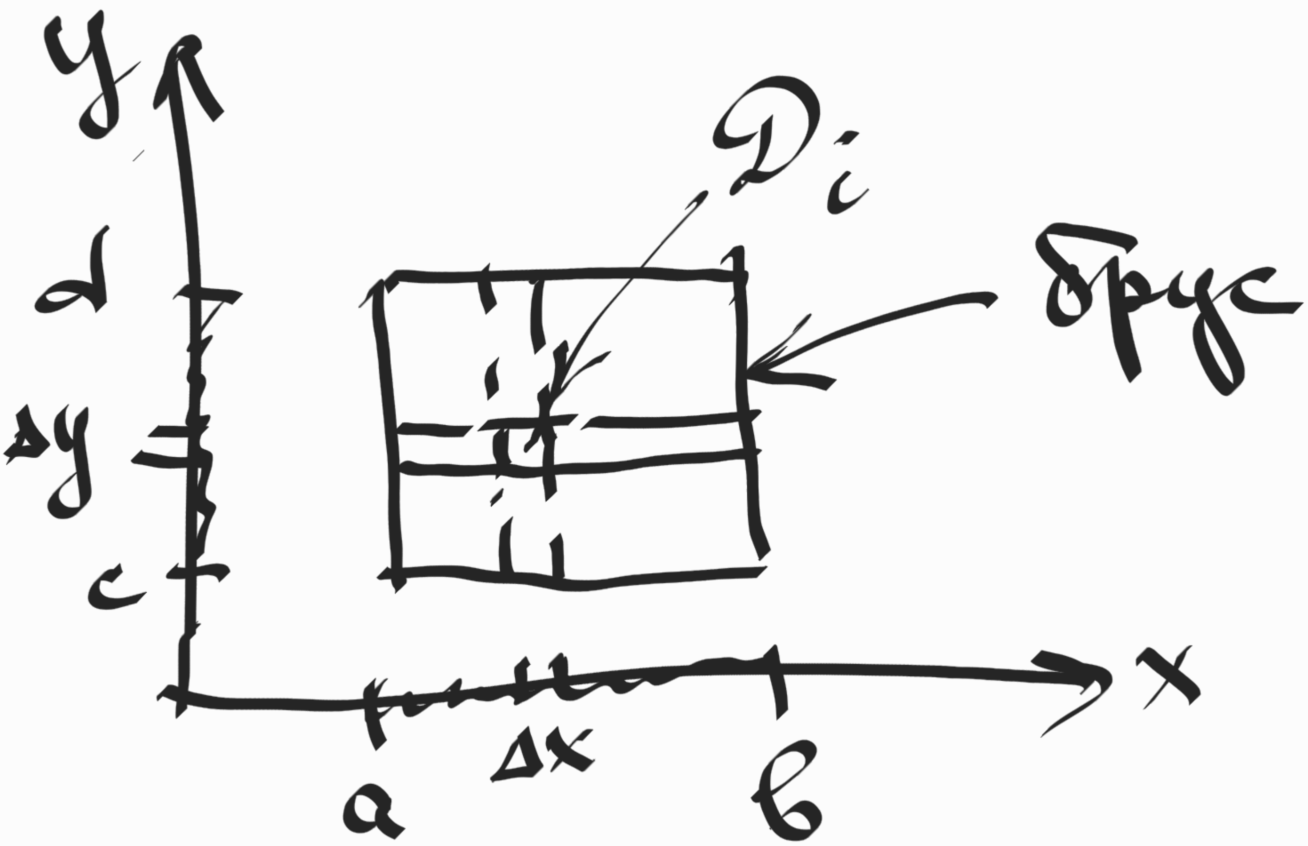
$$\parallel$$

Масса

пл-ки

§3. Определение двойного интеграла

$\star$ $f: [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$



$\star$ $f(x,y)$

def $m_i = \min\limits_{(x,y)\in D_i} f(x,y),$

$$M_i = \max\limits_{(x,y)\in D_i} f(x,y),$$

$S = \sum_i M_i \Delta x_i \Delta y_i$ —

- верхняя сумма Дарбу

$s = \sum_i m_i \Delta x_i \Delta y_i$ —

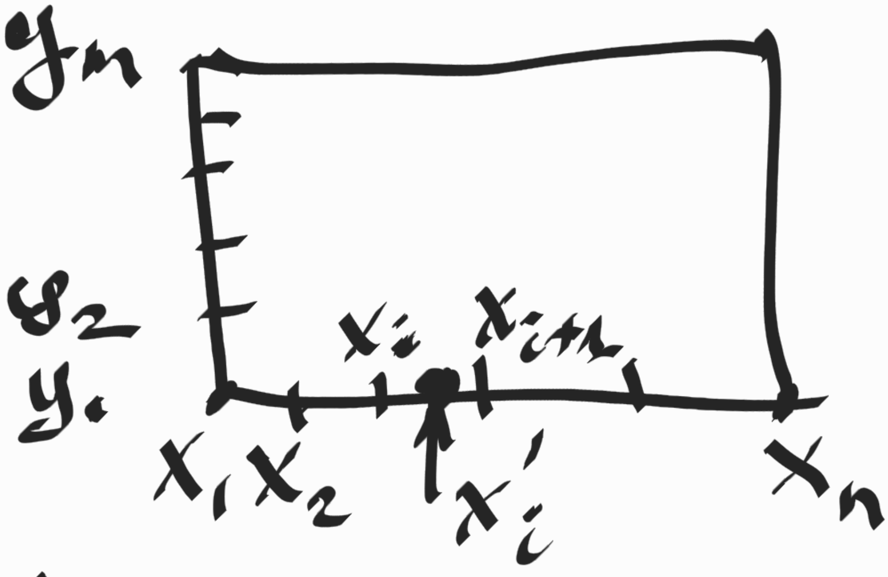
- нижняя сумма Дарбу.

Свойства сумм Дарбу:

def: разбиение.

$\sigma = \{x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m\}$.

разбиение

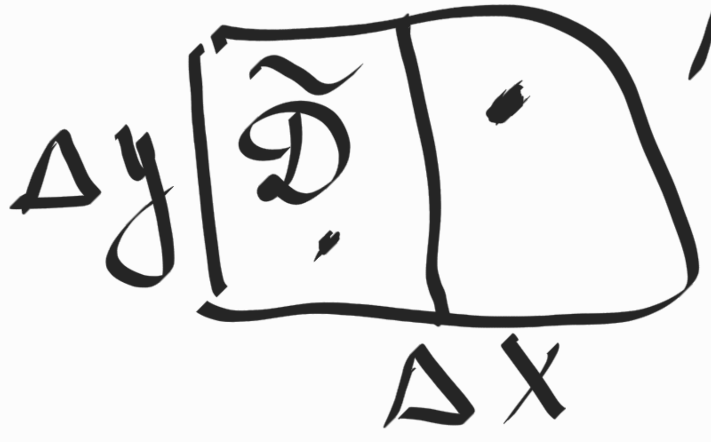


σ' – продолженное разбиение

$$\sigma' = \{x_1, \ldots, x_i, x'_i, x_{i+1}, \ldots \ldots x_n ; y_1, y_2, \ldots, y_m\}$$

$$\sigma' = \{x_1, \ldots, x_n ; y_1, \ldots, y_j, y'_j, y_{j+1}, \ldots, y_m\}$$

1) $S(\sigma) \geq S(\sigma')$



$M \cdot \Delta x \cdot \Delta y$

$\|$

$\max f(x,y),$
$(x,y) \in \tilde{D}$

2) $s(\sigma) \leq s(\sigma')$

Т.о. $\exists\ \sigma_1, \sigma_2$ –

– произвольные продолженные разбиения.

Тогда: $S(\sigma_1) \geq S(\sigma_2)$

$s(\sigma_1) \leq s(\sigma_2)$.

<u>Определение</u>:

f - интегрируема на D, если:

$$\lim_{\lambda(\sigma)\to 0}\left(S_f(\sigma) - s_f(\sigma)\right) = 0.$$

<u>def</u> $\lambda(\sigma) = \max_i \{\Delta x_i, \Delta y_i\}$

ранг разбиения σ

<u>def</u>

$$\lim_{\lambda(\sigma)\to 0} S_f(\sigma) = \lim_{\lambda(\sigma)\to 0} s(\sigma) =$$

$$= \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

(Понятие двойного интеграла).

В наших рассмотрениях $D = [a,b]\times[c,d]$ – брус

Все пока $\exists$ для брусов.

Пусть теперь D – область произвольного вида.

$\forall$ отображение

$f: D \to \mathbb{R}$

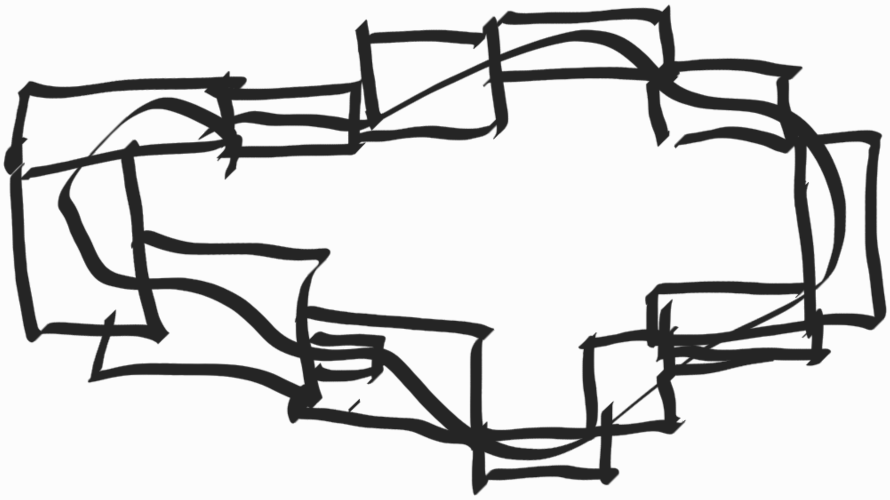
$\subset \mathbb{R}^2$

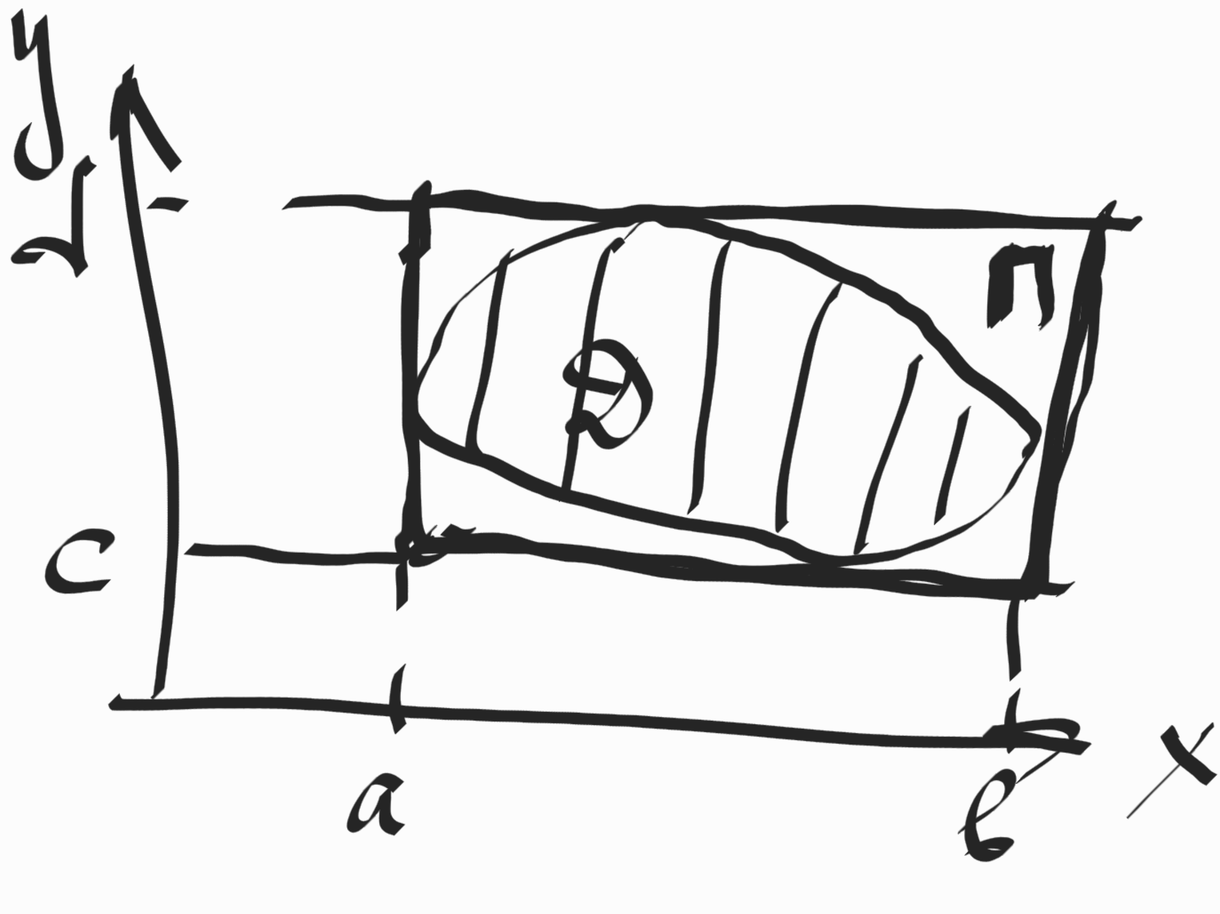
Замечание: мы рассматриваем только области, ограниченные кривыми нулевой площади.

def Кривая l имеет нулевую площадь, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ набор прямоугольников

$\{\Pi_i\}$, такой, что:

$\ell \subset \bigcup_i \Pi_i$, $\sum_i S(\Pi_i) \le \varepsilon$





$$\forall\ f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D \end{cases}$$

χ – характеристическая функция области D;

$f^* = f \cdot \chi$, где

$$\chi \equiv \begin{cases} 1, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D \end{cases}$$

def

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{\Pi} f^*(x,y)\,dx\,dy$$

п.4 Классы интегрируемых функций.

а) непрерывные

$$\forall\ S_f - s_f = \sum_i (M_i - m_i)\cdot \Delta x_i \Delta y_i$$

$$\omega_i \equiv M_i - m_i \quad -$$

— колебание функции f на D_i

def f — непрерывна на множестве D, если

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$:

$|x' - x''| + |y' - y''| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x', y') - f(x'', y'')| < \varepsilon$.

(*) вообще говоря

$\delta = \delta(x', x'', y', y''; \varepsilon)$.

Если $\exists\ \delta = \underline{\underline{\delta(\varepsilon)}}$, то есть нет зависимости от точек, то функция f является равномерно непрерывной.

б) кусочно-непрерывные,

т.е. функции имеющие скачок 1-го рода на конечном числе кривых, имеющих нулевую площадь.

Теорема (Фубини):

$\rceil$ f - интегрируема на D;

$\rceil$ $\forall x \in [a, b]$
$$\exists \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

Тогда: $$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy.$$