УСРЕДНЕНИЕ НЕЛОКАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА

В.А.Слоущ

по совместной работе с Е.А.Жижиной, А.Л.Пятницким и Т.А.Суслиной

В $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассматривается самосопряженный ограниченный оператор $\mathbb{A}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, вида

$$(\mathbb{A}_\varepsilon u)(x) := \varepsilon^{-d-2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} a((x-y)/\varepsilon)\mu(x/\varepsilon, y/\varepsilon)(u(x)-u(y))\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

Операторы такого типа встречаются при описании поведения случайных систем большого (бесконечного) числа частиц. Предполагается, что $a(x)$ — четная неотрицательная функция класса $L_1(\mathbb{R}^d)$, $\|a\|_{L_1} = 1$; $\mu(x, y)$ — ограниченная и положительно определенная функция, $\mathbb{Z}^d$-периодическая по каждой переменной, причем $\mu(x, y) = \mu(y, x)$. Кроме того, предполагаются конечными моменты $M_k = \int_{\mathbb{R}^d} |x|^k a(x) dx$, $k = 1, 2, 3$. При сделанных предположениях оператор $\mathbb{A}_\varepsilon$ ограничен, самосопряжен, неотрицателен, $\min \sigma(\mathbb{A}_\varepsilon) = 0$.

Изучается поведение резольвенты $(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ при малом ε. Мы покажем, что при $\varepsilon \to 0$ оператор $(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ сходится по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$ к резольвенте $(\mathbb{A}^0 + I)^{-1}$ эффективного оператора. Эффективный оператор представляет собой эллиптический оператор второго порядка $\mathbb{A}^0 = -\operatorname{div} g^0 \nabla$; матрица g^0 определяется в терминах решения некоторой вспомогательной задачи на ячейке периодичности $\Omega := [0, 1)^d$. Справедлива оценка для нормы разности резольвент

$$\|(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(a, \mu)\varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Метод исследования опирается на теоретико-операторный подход, который был развит М.Ш.Бирманом и Т.А.Суслиной. Мы обсудим ряд особенностей нелокального оператора Шрёдингера, которые требуют любопытной модификации теоретико-операторного подхода и делают задачу усреднения для этого оператора очень интересной.