Вариационное исчисление. Семинар 15 апреля.

15 апреля 2020 г.

1 Задача 166 (Краснов).

Найти экстремали функционала

$$J[y] = \int_0^1 y'^2(x)dx, \qquad y(0) = 1, \qquad y(1) = 6 \tag{1}$$

при условии

$$J_1[y] = \int_0^1 y(x)dx = 3. \tag{2}$$

Решение.
Данная задача является изопериметрической задачей, поскольку условие связи (2) является интегральным. Составим расширенную функцию Лагранжа

$$H = F + \lambda G = {y'}^2 + \lambda y. \tag{3}$$

Поскольку множитель Лагранжа λ в изопериметрической задаче является постоянной величиной, расширенная функция Лагранжа не зависит от x. Воспользуемся первым интегралом уравнения Эйлера

$$H - y' H_{y'} = C. \tag{4}$$

Подставляя H из (3) в уравнение (4), получим

$$\lambda y - {y'}^2 = C, \tag{5}$$

или же

$$y' = \pm\sqrt{\lambda y - C}.$$

Интегрируя полученное уравнение, мы приходим к представлению для экстремали

$$\lambda y - C = \frac{\lambda^2}{4}(x + C_2)^2, \tag{6}$$

$$y(x) = C_3 + \mu(x + C_2)^2. \tag{7}$$

Остается зафиксировать три параметра: C_2, C_3 и μ. Это следует сделать, воспользовавшись двумя граничными условиями и условием связи:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad C_3 + \mu C_2^2 = 1, \\ y(1) = 6 \quad \Rightarrow \quad C_3 + \mu(1 + C_2)^2 = 6, \\ \int_0^1 y(x)dx = 3 \quad \Rightarrow \quad C_3 + \frac{\mu}{3} + \mu C_2 + \mu C_2^2 = 3. \end{cases}$$

Совокупность этих условий позволяет определить коэффициенты

$$\mu = 3, \qquad C_2 = \frac{1}{3}, \qquad C_3 = \frac{2}{3}.$$

Подстановка этих констант в представление (7) приводит к окончательному ответу

$$y(x) = 3x^2 + 2x + 1.$$

2 Задача 171 (Краснов).

Найти геодезические линии круглого цилиндра.

Решение.

На поверхности цилинра естественно ввести пару координат: (φ, z). Здесь φ – угол поворота относительно оси цилиндра, z – сдвиг вдоль оси цилиндра.

Тогда, пользуясь обозначением R для радиуса цилиндра, получим, что квадрат элементарного перемещения вдоль гладкой кривой, лежащей на поверхности цилиндра, ds^2 имеет вид:

$$ds^2 = (Rd\varphi)^2 + dz^2. \tag{8}$$

Отсюда

$$ds = d\varphi\sqrt{R^2 + {z'}^2_{\varphi}}. \tag{9}$$

Таким образом, мы должны минимизировать функционал

$$S = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi\sqrt{R^2 + {z'}^2_{\varphi}}. \tag{10}$$

Здесь точки $A(\varphi_0, z_0)$ и $B(\varphi_1, z_1)$ – начальная и конечная точки геодезической на цилиндре.

Таким образом, функция Лагранжа принимает вид

$$F(\varphi, z(\varphi), z'(\varphi)) = \sqrt{R^2 + {z'}^2_{\varphi}}.$$

Поскольку функция Лагранжа не зависит от $z(\varphi)$, мы можем воспользоваться первым интегралом уравнения Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial {z'}_{\varphi}} = C \qquad \Rightarrow \qquad \frac{z'_{\varphi}}{\sqrt{R^2 + {z'}^2_{\varphi}}} = \tilde{C}.$$

Отсюда выражение для z'_{φ} принимает вид

$$z'_{\varphi} = C_1. \tag{11}$$

Интегрируя уравнение (11), получаем окончательно

$$z(\varphi) = C_1\varphi + C_2. \tag{12}$$

Из граничных условий $z(\varphi_0) = z_0$, $z(\varphi_1) = z_1$ находим значение постоянных C_1 и C_2.

3 Задача 115 (методичка).

Найти геодезические линии конуса $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2\alpha$, где $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Решение.

Введем сферические координаты по формулам

$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$$

Уравнение конуса в новых координатах

$$\theta = \alpha.$$

Дифференциал дуги в сферических координатах имеет вид:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \tag{13}$$

При этом

$$dx = \sin\theta\cos\varphi d\rho + \rho\cos\theta\cos\varphi d\theta - \rho\sin\theta\sin\varphi d\varphi,$$
$$dy = \sin\theta\sin\varphi d\rho + \rho\cos\theta\sin\varphi d\theta + \rho\sin\theta\cos\varphi d\varphi,$$
$$dz = \cos\theta d\rho - \rho\sin\theta d\theta.$$

Сумма квадратов дифференциалов равна

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta d\varphi^2.$$

Возвращаясь к уравнению (13), получаем для дифференциала дуги выражение

$$ds = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta d\varphi^2} = \sqrt{\rho'^2_\varphi + \rho^2\theta'^2_\varphi + \rho^2\sin^2\theta}d\varphi. \tag{14}$$

Таким образом, задача сводится к построению кривой, лежащей на поверхности $\theta = \alpha$ и дающей минимум функционалу

$$J[\rho,\theta] = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{\rho'^2_\varphi + \rho^2\theta'^2_\varphi + \rho^2\sin^2\theta}d\varphi \tag{15}$$

при наличии граничных условий

$$\rho(\varphi_0) = \rho_0, \qquad \theta(\varphi_0) = \theta_0, \qquad \rho(\varphi_1) = \rho_1, \qquad \theta(\varphi_1) = \theta_1.$$

Поскольку на конусе выполняется условие $\theta = \alpha$, выражение (15) сильно упрощается

$$J[\rho] = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{\rho'^2_\varphi + \rho^2\sin^2\alpha}d\varphi \tag{16}$$

Поскольку функция Лагранжа $F = \sqrt{\rho'^2_\varphi + \rho^2\sin^2\alpha}$ не зависит от переменной φ, воспользуемся первым интегралом уравнения Эйлера

$$F - \rho'_\varphi F_{\rho'_\varphi} = C.$$

Это означает, что

$$\sqrt{\rho'^2_\varphi + \rho^2\sin^2\alpha} - \rho'_\varphi \frac{\rho'_\varphi}{\sqrt{\rho'^2_\varphi + \rho^2\sin^2\alpha}} = C.$$

После упрощения мы приходим к уравнению

$$\frac{\rho^2\sin^2\alpha}{\sqrt{\rho'^2_\varphi + \rho^2\sin^2\alpha}} = C. \tag{17}$$

Решение этого уравнения будем искать в параметрической форме, вводя параметр t:

$$\rho'_\varphi = \rho\sin\alpha\tan t. \tag{18}$$

Такая параметризация уравнения (17) приводит к связи

$$\frac{\rho^2\sin^2\alpha}{\rho\sin\alpha\sqrt{\tan^2 t + 1}} = C \qquad \Rightarrow \qquad \rho\sin\alpha\cos t = C.$$

Таким образом,

$$\rho = \frac{C}{\sin\alpha\cos t(\varphi)} \tag{19}$$

Продифференцируем полученное уравнение по φ:

$$\rho'_\varphi = \rho\sin\alpha\tan t = \frac{C\sin t}{\sin\alpha\cos^2 t}t'_\varphi.$$

Подставляя в полученное уранение выражение (19), получаем

$$\frac{dt}{d\varphi} = \sin\alpha \qquad \Rightarrow \qquad t = \varphi\sin\alpha + C_1.$$

Возвращаясь к уравнению (19), получим

$$\rho(\varphi) = \frac{C}{\sin\alpha\cos t} = \frac{C}{\sin\alpha\cos(\varphi\sin\alpha + C_1)}. \tag{20}$$

Постоянные C, C_1 должны быть определены из граничных условий.

4 Задача 116 (методичка).

На конусе $x^2 + y^2 = z^2$ найти кривую, имеющую наименьший момент инерции относительно оси OZ.

Решение.

Квадрат дифференциала дуги кривой выражается следующим образом

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Введем на поверхности конуса следующую параметризацию

$$x = r\cos\varphi,$$

$$y = r\sin\varphi,$$

$$z = r.$$

С учетом этой параметризации запишем ds^2 следующим образом:

$$dx = \cos\varphi dr - r\sin\varphi d\varphi,$$

$$dy = \sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi,$$

$$dz = dr.$$

Тогда

$$ds = \sqrt{2dr^2 + r^2 d\varphi^2} = \sqrt{2{r'}_\varphi^2 + r^2}d\varphi.$$

Поскольку момент инерции элементарной части дуги кривой относительно оси OZ имеет вид

$$dI_z = dsr^2,$$

очевидно, что полный момент дуги кривой можно вычислить следующим образом

$$J[r] = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi r^2 \sqrt{2{r'}_\varphi^2 + r^2}. \tag{21}$$

Теперь можно сформулировать исходную задачу следующим образом. Мы ищем экстремали функционала (21) при условии прохождения кривой на поверхности конуса через краевые точки $A(\varphi_0, r_0)$ и $B(\varphi_1, r_1)$.

Поскольку функция Лагранжа $F = r^2\sqrt{2{r'}_\varphi^2 + r^2}$ не зависит от переменной интегрирования φ, воспользуемся первым интегралом уравнения Эйлера

$$F - {r'}_\varphi F_{{r'}_\varphi} = C.$$

Иначе говоря,

$$r^2\sqrt{2{r'}_\varphi^2 + r^2} - {r'}_\varphi r^2 \frac{2{r'}_\varphi}{\sqrt{2{r'}_\varphi^2 + r^2}} = C,$$

$$\frac{r^4}{\sqrt{2{r'}_\varphi^2 + r^2}} = C. \tag{22}$$

Введем параметризацию производной ${r'}_\varphi$ в уравнении (22) следующим образом

$${r'}_\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} r\tan t, \tag{23}$$

где параметр t рассматривается как некоторая функция переменной φ. Это позволят переписать (22) как

$$r^3\cos t = C, \qquad \Rightarrow \qquad r = \frac{C_1}{\cos^{1/3} t}. \tag{24}$$

Мы можем теперь дифференцировать левую и правую часть уравнения (24) по переменной φ:

$${r'}_\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} r\tan t = \frac{C_1 \sin t}{3\cos^{4/3} t}\ t'_\varphi. \tag{25}$$

Мы воспользовались здесь параметризацией (23).

Наконец, подставляя выражение (24) в уравнение (25), получаем

$$dt = \frac{3}{\sqrt{2}} d\varphi \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{3}{\sqrt{2}}\varphi + C_2.$$

Возвращаясь к уравнению (24), запишем окончательный ответ

$$r(\varphi) = \frac{C_1}{\cos^{1/3}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\varphi + C_2\right)}.$$

Постоянные C_1 и C_2 должны быть фиксированы с помощью граничных условий

$$r(\varphi_0) = r_0, \qquad r(\varphi_1) = r_1.$$