Лекция 9

Для начала, есть пара ошибок в формулах, которые всплыли в ходе консультации

1) лекция 4, стр.5 верхняя формула и следующая за ней имеют неправильные знаки в числителе. Правильные варианты выглядят так

$$P_\nu(z) = \frac{(-2)^\nu}{2\pi i 2^\nu} \int_{\gamma_0} \frac{(t+1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}} dt + O(1)$$

$$\frac{1}{2\pi i 2^\nu} \int_{\gamma_0} \frac{(-2)^\nu (t+1)^\nu - (t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}} dt$$

2) лекция 8 стр2 четвертая формула снизу. Там неправильная степень в оценке. Правильный вариант

$$w''_n + p(z)w'_n + q(z)w_n = O(e^{\alpha_1 z} z^{-2-n-\rho_1})$$

ВОПРОС: как доказать утверждение теоремы для второго решения уравнения?

Второе решение дифференциального уравнения можно выразить по стандартной формуле через первое решение

$$w_2(z) = w_1(z)(const + \int_{z_0}^{z} e^{-\int p} (w_1)^{-2} d\xi)$$

Подставляя сюда асимптотический ответ для первого решения, можно получить ответ для второго.

ВОПРОС: как доказать второе неравенство из индукционного предположения.

Для этого надо заметить, что

$$g_n^{l+1}(z) = (g_n^{l+1}(z) - g_n^l(z)) + (g_n^l(z) - g_n^{l-1}(z)) + ... + (g_n^1(z) - g_n^0(z)) + g_n^0(z)$$

а для

$$g_n^{j+1}(z) - g_n^j(z)$$

уже есть оценки.

1 Метод Лапласа для построения интегрального представления

До сих пор мы изучали локальные решения дифференциального уравнения в окрестности правильной или неправильной особой точки. Однако, наиболее интересные (и важные с точки зрения приложений) вопросы не решить в рамках локального (т.е. в окрестности конкретной точки) анализа. Допустим, конструкция сферических функций возникла у нас в результате изучения краевой задачи для уравнения Лежандра. А возможно это стало в результате построения интегрального представления (интеграла Шлефли). К сожалению, построить интегральное представление возможно не всегда. С другой стороны без интегрального представления возможности формульной науки крайне ограничены. По этим причинам набор спецфункций для линейных дифференциальных уравнений в очень значительной степени пересекается с уравнениями для которых есть интегральные представления.

Расмотрим класс уравнений второго порядка

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0.$$

со следующими свойствами:

Уравнение имеет две особые точки. Правильную особую точку $z = 0$ и неправильную особую точку $z = \infty$. При этом функции p и q в окрестности бесконечности разлагаются в ряды

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^{-k}$$

$$q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^{-k}$$

Легко видеть, что в этом случае функции p и q должны быть рациональными. У функций p и q единственная конечная особая точка $z = 0$(причем правильная). Таким образом, ряды для функций p и q резко упрощаются

$$p(z) = p_0 + \frac{p_1}{z}$$

$$q(z) = q_0 + \frac{q_1}{z} + \frac{q_2}{z^2}$$

и класс уравнений, которые мы выделили становится очень конкретным. Этот класс можно еще немного упростить, сделав замену неизвестной функции

$$w(z) = z^{\rho} v(z)$$

Здесь ρ - один из показателей (любой) для правильной особой точки $z = 0$. Эта замена не выводит уравнение из нашего класса. Таким образом новые функции $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$, которые появляются после замены имеют аналогичное разложение

$$\tilde{p}(z) = \tilde{p}_0 + \frac{\tilde{p}_1}{z}$$

$$\tilde{q}(z) = \tilde{q}_0 + \frac{\tilde{q}_1}{z} + \frac{\tilde{q}_2}{z^2}$$

но при этом один из показателей для нового уравнения в окрестности точки 0 будет равен нулю и, следовательно

$$\tilde{q}_2 = 0.$$

Таким образом, после замены уравнение примет вид

$$zw'' + (\tilde{p}_0 z + \tilde{p}_1)w' + (\tilde{q}_0 z + \tilde{q}_1)w = 0$$

Это уравнение мы и будем в дальнейшем анализировать, но для упрощения записи уберем "волну"над коэффициентами.

$$zw'' + (p_0 z + p_1)w' + (q_0 z + q_1)w = 0$$

Будем искать интегральное представление для решений этого уравнения в виде

$$w(z) = \int_\gamma e^{zt} f(t)dt.$$

Здесь γ некоторый контур в комплексной плоскости, $f(z)$ -неизвестная функция. Подставим этот интеграл в уравнение. Преобразуем слагаемые

$$w'(z) = \int_\gamma e^{zt} t f(t)dt$$

$$w''(z) = \int_\gamma e^{zt} t^2 f(t)dt$$

$$zw(z) = \int_\gamma z e^{zt} f(t)dt = -\int_\gamma e^{zt} f'(t)dt + e^{zt} f(t)|_\gamma$$

$$zw'(z) = \int_\gamma z e^{zt} t f(t)dt = -\int_\gamma e^{zt} (tf(t))'dt + e^{zt} t f(t)|_\gamma$$

$$zw''(z) = \int_\gamma z e^{zt} t^2 f(t)dt = -\int_\gamma e^{zt} (t^2 f(t))'dt + e^{zt} t^2 f(t)|_\gamma$$

Тогда

$$\int_\gamma e^{zt}(-(t^2 f(t))' - p_0(tf(t))' + p_1 t f(t) - q_0 f'(t) + q_1 f(t))dt + e^{zt}(t^2 + tp_0 + q_0)f(t)|_\gamma = 0$$

Будем полагать по отдельности равными нулю интеграл и внеинтегральный член. Интеграл можно сделать равным нулю потребовав, чтобы функция f удовлетворяла дифференциальному уравнению

$$-(t^2 f(t))' - p_0(tf(t))' + p_1 t f(t) - q_0 f'(t) + q_1 f(t) = 0$$

или

$$\frac{f'}{f} = \frac{-2t - p_0 + p_1 t + q_1}{t^2 + p_0 t + q_0} = \frac{\rho_1 - 1}{t - \alpha_1} + \frac{\rho_2 - 1}{t - \alpha_2}$$

Здесь $\alpha_{1,2}$ - корни квадратного уравнения из теоремы о неправильной особой точке

$$\alpha^2 + p_0 \alpha + q_0 = 0$$

(мы по-прежнему считаем, что $\alpha_1 \neq \alpha_2$). $\rho_{1,2}$ - показатели из той же теоремы

$$\rho_{1,2} = \frac{\alpha_{1,2}p_1 + q_1}{p_0 + 2\alpha_{1,2}}$$

Таким образом

$$f = (t-\alpha_1)^{\rho_1-1}(t-\alpha_2)^{\rho_1-1}$$

Теперь займемся выбором контура. Нам необходимо, чтобы

$$e^{zt}(t^2+tp_0+q_0)f(t)|_\gamma = e^{zt}(t-\alpha_1)^{\rho_1}(t-\alpha_2)^{\rho_2}|_\gamma = 0$$

При этом существует опасность того, что в целом мы получим нулевое решение нашего уравнения. Скажем замкнутый контур не содержащий особенностей внутри очевидно даст нулевую подстановку, но и нулевое решение! Для выбора контура, который даст нулевую подстановку и при этом ненулевое решение надо использовать особенности подынтегральной функции. В нашем случае эти особенности следующие: две точки ветвления $t = \alpha_{1,2}$ и точка $t = \infty$. Концы контура γ можно увести на бесконечность по направлению, для которого экспонента e^{zt} убывает. Если при этом контур будет охватывать точку ветвления, то мы получим ненулевое решение уравнения. Давайте для определенности будем считать, что $\mathrm{Re}z > 0$. Таким образом мы получили два решения нашего уравнения

$$w_{1,2}(z) = \int_{\gamma_{1,2}} e^{zt}(t-\alpha_1)^{\rho_1-1}(t-\alpha_2)^{\rho_2-1}dt.$$

Особые случаи возникают, если ρ_1 или ρ_2 становятся целыми. Если при этом $\rho_1 \leq 0$, то вместо точки ветвления мы получаем полюс. Следовательно, интеграл вычисляется по вычетам и мы получаем явное решение. Если $\rho_1 > 0$, то особая точка исчезает и интеграл равен нулю. В этом случае, чтобы получить ненулевое решение надо взять контур от $t = \alpha_1$ до $t = -\infty + \alpha_1$ (в случае $\rho_1 > 0$ нет опасности, что интеграл не сойдется в точке $t = \alpha_1$) .

ВОПРОС: Как мы уже видели для уравнения

$$zw'' + (p_0z + p_1)w' + (q_0z + q_1)w = 0$$

один из показателей в окрестности точки $z = 0$ является нулевым. Т.е. у нас должно быть голоморфное в окрестности точки ноль решение. Для какого контура возникает это голоморфное решение?

ВОПРОС: найти интегральные представления для решений нашего уравнения в случае кратного корня $\alpha_1 = \alpha_2$

2 Асимптотическое поведение интегральных представлений при $z \to \infty$

Посмотрим на асимптотику интегральных представлений найденных в предыдущем параграфе

$$w_1(z) = \int_{\gamma_1} e^{zt}(t-\alpha_1)^{\rho_1-1}(t-\alpha_2)^{\rho_2-1}dt.$$

По-прежнему считаем, что $\mathrm{Re} z > 0$ и $z \to \infty$. Особые случаи, когда ρ_1 целое пока не рассматриваем. Зафиксируем веточки многозначных функций $(t-\alpha_1)^{\rho_1 - 1}$ и $(t-\alpha_2)^{\rho_1-1}$ следующим образом. Проведем для этих функций разрезы от точки $t = \alpha_1$ до $t = -\infty + \alpha_1$ и от точки $t = \alpha_2$ до $t = -\infty + \alpha_2$ соответственно и будем считать что логарифмы на продолжении этих разрезов в положительную сторону сторону вещественны. Сделаем замену

$$\tau = t - \alpha_1$$

Тогда

$$w_1(z) = e^{\alpha_1 z} \int_{\gamma_0} e^{z\tau} \tau^{\rho_1 - 1} (\tau - \alpha_2 + \alpha_1)^{\rho_2 - 1} d\tau.$$

(γ_0 - контур вокруг отрицательной полуоси)

Из метода перевала легко видеть, что асимптотика нашего интеграла формируется в окрестности точки $\tau = 0$ и с экспоненциальной точностью можно обрезать наш контур в окрестности $\tau = -1$ и оставить только его кусочек $\widetilde{\gamma}_0$ в окрестности нуля. На этом контуре можно разложить функцию

$$(\tau - \alpha_2 + \alpha_1)^{\rho_2 - 1}$$

в ряд Тейлора

$$(\tau - \alpha_2 + \alpha_1)^{\rho_2 - 1} = (-\alpha_2 + \alpha_1)^{\rho_2 - 1} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \tau^k$$

Поскольку ряд сходится на нашем "обрезанном"контуре равномерно, то его можно поменять местами с интегралом

$$w_1(z) \sim e^{\alpha_1 z} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_{\widetilde{\gamma}_0} e^{z\tau} \tau^{k + \rho_1 - 1} \tau.$$

Далее можно вновь вернуться к интегралу по контуру γ_0 и при этом опять с экспоненциальной точностью

$$w_1(z) \sim e^{\alpha_1 z} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_{\gamma_0} e^{z\tau} \tau^{k + \rho_1 - 1} \tau.$$

Сделаем замену

$$s = \tau z$$

Тогда

$$w_1(z) \sim e^{\alpha_1 z} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k-\rho_1} \int_{\gamma_0} e^s s^{k + \rho_1 - 1} ds.$$

Таким образом, получаем асимптотическое разложение

$$w_1(z) \sim e^{\alpha_1 z} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{2\pi i}{\Gamma(1 - k - \rho_1)} z^{-k-\rho_1}$$