Лекция 8

ВОПРОС: В процессе вывода мы поменяли местами сумму и оператор Лапласа. Почему это можно делать?

Трехмерный оператор Лапласа состоит из двух частей радиальной (с производными по r) и угловой. Замена местами радиальной части оператора Лапласа решается в рамках договоренностей из комплексного анализа о том, что можно почленно дифференцировать любой степенной ряд в круге сходимости. Что касается возможности замены местами для угловой части оператора, то она получается задним числом, когда мы понимаем, что наши коэффициенты - тригонометрические полиномы порядка n. Для них дифференцирование это домножение на множитель $O(n)$. Для степенного ряда это не портит сходимости.

ВОПРОС: Как строить формальное решение дифференциального уравнения

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0.$$

в случае корня

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha?$$

В случае кратного корня надо искать решение в виде следующего формального ряда

$$w_1(z) = e^{\alpha z} e^{\beta z^{1/2}} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-\rho - k/2}$$

Т.е. выделить экспоненту, а затем поменять переменную z на $\sqrt{z}$.

В прошлый раз мы описали построение формального решения

$$w_1(z) = e^{\alpha_1 z} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k-\rho_1}$$

дифференциального уравнения

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0.$$

в окрестности бесконечности с коэффициентами

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^{-k}$$

$$q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^{-k}$$

Теперь займемся доказательством того, что наше формальное решение является асимптотическим разложением точного решения уравнения. Мы попрежнему считаем, что $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Тогда равенство

$$|e^{\alpha_1 z}| = |e^{\alpha_2 z}|$$

задает геометрическое место точек, которое соответствует прямой проходящей через начало координат. Эта прямая разделяет комплексную плоскость параметра z на две полуплоскости. Давайте несколько урежем эти полуплоскости по углу в полярных координатах (в результате, они станут углами раствора $\pi - 2\varepsilon$). Будем считать, для определенности, что мы работаем с урезанной полуплоскостью для которой

$$|e^{\alpha_1 z}| < |e^{\alpha_2 z}|.$$

Тогда в данной урезанной полуплоскости действует следующая теорема.

Theorem 0.1 *Существует единственное решение $u(z)$, для которого формальный ряд*

$$w_1(z) = e^{\alpha_1 z} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k-\rho_1}$$

является асимптотическим разложением при $z \to \infty$. Существует однопараметрическое семейство решений, для которого формальный ряд

$$w_2(z) = e^{\alpha_2 z} \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^{-k-\rho_2}$$

является асимптотическим разложением при $z \to \infty$. Асимптотическое разложение действует в угле(раствором $\pi - 2\varepsilon$).

Замечание. Легко видеть, что если добавить к решению с большей экспонентой решение с меньшей экспонентой, то асимптотическое разложение не изменится. Отсюда понятно, что второе решение не может быть единственным.

Займемся доказательством теоремы. Прежде всего заметим, что если рассмотреть "обрезанный"ряд $w_1(z)$

$$w_n(z) = e^{\alpha_1 z} \sum_{k=0}^{n} c_k z^{-k-\rho_1}$$

то он удовлетворяет уравнению со следующей точностью

$$w''_n + p(z)w'_n + q(z)w_n = O(e^{\alpha_1 z} z^{-2-n-\rho_1})$$

Это следствие нашей рекуррентной системы. Для дальнейших построений нам удобно перейти от уравнения второго порядка

$$u'' + p(z)u' + q(z)u = 0.$$

к уравнению Риккати

$$v' + p(z)v + q(z) + v^2 = 0$$

с помощью замены

$$u(z) = e^{\int v(\tilde{z})d\tilde{z})}$$

Для уравнения Риккати наше формальное решение примет вид

$$\hat{v} = \alpha_1 + \frac{\rho_1}{z} + \sum_{k=2}^{\infty} e_k z^{-k}$$

Обозначим его отрезок v_n

$$v_n = \alpha_1 + \frac{\rho_1}{z} + \sum_{k=2}^{n} e_k z^{-k}$$

При подстановке в уравнение Риккати он имеет следующую погрешность

$$v_n' + p(z)v_n + q(z) + v_n^2 = \Delta v_n = O(z^{-n-1})$$

Вычтем из точного уравнения Риккати приближенное

$$v - v_n' + p(z)(v - v_n) + v^2 - v_n^2 = -\Delta v_n$$

и сделаем замену

$$v - v_n = g_n$$

Тогда

$$g_n' + (p(z) + 2v_n)g_n = -g_n^2 - \Delta v_n$$

Перепишем это уравнение в виде интегрального уравнения. Воспользуемся формулой для решения уравнения первого порядка

$$y' + f(x)y = F(x), \quad y = e^{-\int f(\xi)d\xi} \int e^{\int f(\xi)d\xi} F(\eta)d\eta$$

Тогда

$$g_n(z) = e^{-\int (p(\xi)+2v_n)d\xi} \int e^{-\int (p(\xi)+2v_n)d\xi} (-g_n^2 - \Delta v_n)d\eta$$

Пока здесь все интегралы неопределенные. Выбор конкретных пределов фиксирует выбор конкретного решения уравнения Риккати. Для начала договоримся, как устроен интеграл

$$\int (p(\xi) + 2v_n)d\xi$$

Под интегралом стоит сходящийся ряд Тейлора

$$p_0 + 2\alpha_1 + \frac{p_1 - 2\rho_1}{z} + \sum_{k=2}^{\infty} f_k z^{-k},$$

причем

$$p_0 + 2\alpha_1 = \alpha_1 - \alpha_2$$

$$p_1 - 2\rho_1 = \rho_2 - \rho_1$$

Проинтегрируем первые два слагаемых явно, а для остальных возьмем минус интеграл от "z"до бесконечности по лучу с постоянным аргументом комплексного числа ξ

$$\int (p(\xi) + 2v_n) d\xi = (\alpha_1 - \alpha_2) z + (\rho_2 - \rho_1) \ln z - \int_z^\infty \sum_{k=2}^{\infty} f_k \xi^{-k} d\xi$$

Интеграл сойдется поскольку подынтегральное выражение $O(z^2)$. Тогда для экспоненты возникают следующие оценки

$$e^{\int (p(\xi)+2v_n) d\xi} < c_1 |e^{(\alpha_1-\alpha_2)z}||z^{(\rho_2-\rho_1)}|$$

$$e^{-\int (p(\xi)+2v_n) d\xi} < c_2 |e^{(\alpha_2-\alpha_1)z}||z^{(\rho_1-\rho_2)}|$$

Теперь можно договориться о основном интеграле по η. Видно, что экспонента

$$e^{\int (p(\xi)+2v_n) d\xi}$$

убывает на бесконечности (за счет этого интеграл на бесконечности сходится). Будем считать, что интеграл по η также считается от "z"до бесконечности по лучу с постоянным аргументом комплексного числа η. Доказательство нашей асимптотики будет результатом оценок для нелинейного интегрального уравнения, к которому мы свели наше уравнение Риккати. Введем набор итераций для этого уравнения

$$g_n^0(z) = 0$$

$$g_n^1(z) = e^{-\int (p(\xi)+2v_n) d\xi} \int e^{\int (p(\xi)+2v_n) d\xi} (-\Delta v_n) d\eta$$

$$g_n^{l+1}(z) = e^{-\int (p(\xi)+2v_n) d\xi} \int e^{\int (p(\xi)+2v_n) d\xi} (-(g_n^l)^2 - \Delta v_n) d\eta$$

Теперь займемся оценкой итераций

$$|g_n^1(z)| < c_0 c_1 |e^{(\alpha_2-\alpha_1)z}||z^{(\rho_1-\rho_2)}| c_2 |e^{(\alpha_1-\alpha_2)z}||z^{(\rho_2-\rho_1)}| \frac{1}{|z|^{n+1}} = \frac{c}{2|z|^{n+1}}$$

Здесь константа c_0 возникает при интегрировании по η. Используем метод математической индукции. В отличие от тех примеров, которые у нас уже были мы будем на каждом шаге проверять сразу два неравенства. Пусть при $l \leq N$ верны следующие оценки

$$|g_n^1(z) - g_n^{1-1}(z)| < \frac{M^l}{|z|^{l(n+1)}}$$

$$|g_n^1(z)| < \frac{2c}{|z|^{n+1}}$$

Покажем, что они верны при $l = N+1$ Вычитая друг из друга две формулы

$$g_n^{N+1}(z) = e^{-\int (p(\xi)+2v_n) d\xi} \int e^{\int (p(\xi)+2v_n) d\xi} (-(g_n^N)^2 - \Delta v_n) d\eta$$

$$g_n^N(z) = e^{-\int (p(\xi)+2v_n)d\xi} \int e^{\int (p(\xi)+2v_n)d\xi} (-(g_n^{N-1})^2 - \Delta v_n) d\eta$$

получим

$$g_n^N(z) - g_n^{N-1}(z) = e^{-\int (p(\xi)+2v_n)d\xi} \int e^{\int (p(\xi)+2v_n)d\xi} (-g_n^N + g_n^{N-1})(-g_n^N - g_n^{N-1}) d\eta$$

Воспользуемся оценками

$$|g_n^1(z) - g_n^{1-1}(z)| < \frac{M^l}{|z|^{l(n+1)}}$$

и

$$|g_n^1(z) + g_n^{1-1}(z)| < \frac{4c}{|z|^{n+1}}$$

Тогда

$$|g_n^N(z) - g_n^{N-1}(z)| < c_0 c_1 |e^{(\alpha_2-\alpha_1)z}||z^{(\rho_1-\rho_2)}| c_2 |e^{(\alpha_1-\alpha_2)z}||z^{(\rho_2-\rho_1)}| \frac{M^l}{|z|^{l(n+1)}} \frac{4c}{|z|^{n+1}}$$

или

$$|g_n^N(z) - g_n^{N-1}(z)| < \frac{c_0 c_1 c_2 4 c M^l}{|z|^{(l+1)(n+1)}}$$

Таким образом, достаточно взять

$$M = c_0 c_1 c_2 4c$$

ВОПРОС: как доказать второе неравенство из индукционного предположения.

Будем считать, что это доказано. Таким образом, мы видим, что при $l \to \infty$

$$g_n^1(z) \to g_n(z)$$

Т.е.

$$g_n(z) = O(\frac{1}{z^{n+1}})$$

Следовательно

$$v - v_n = O(\frac{1}{z^{n+1}})$$

Отсюда, понятно, что w_n - отрезок асимптотического разложения точного решения $u(z)$.

ВОПРОС: как доказать утверждение теоремы для второго решения уравнения