Лекция 6

По поводу вопросов с предыдущей лекции

ВОПРОС: Доказать формулу

$$v(z) = (1 - z^2)^{m/2} \frac{d^m}{dz^m} w(z) \tag{1}$$

Для доказательства формулы достаточно продифференцировать $m$ раз уравнение Лежандра. После замены неизвестной функции, соответствующей формуле (1) Вы получите обобщенное уравнение Лежандра.

ВОПРОС: Мы начинали разговоры о присоединенных полиномах Лежандра с вопроса о решении сингулярной краевой задачи:

$$-((1 - z^2)y')' + \frac{m^2}{(1 - z^2)} = \lambda y, \quad \lambda = \nu(\nu + 1)$$

$y$ ограничено в точках $z = -1$ и $z = 1$. Мы нашли часть решений этой задачи в в виде наших полиномов. Но в нашей логике есть небольшой дефект. Дело в том, что мы опираемся на формулу для решения

$$v(z) = (1 - z^2)^{m/2} \frac{d^m}{dz^m} w(z)$$

Она хорошо работает для всех $\nu$ за исключением ситуации когда $\nu = n$-целое и $n < m$. В этом случае глядя на эту формулу мы получаем только одно линейно независимое решение, а второе будет нулем. Таким образом, вообще говоря, могут быть решения нашей краевой задачи помимо присоединенных полиномов Лежандра. Так ли это и почему?

Допустим, что у сингулярной краевой задачи есть дополнительные собственные функции. Они должны быть ортогональны уже имеющемуся набору собственных функций. Это получается стандартным образом, как Вы это делали для обычной краевой задачи на 2-ом курсе. Но полученный нами набор собственных функций - полный. Поэтому других собственных функций нет. Таким образом, мы нашли все решения сингулярной краевой задачи.

# 1 Сферические функции

Рассмотрим выражение для оператора Лапласа в сферических координатах $(r, \theta, \phi)$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)$$

Угловая часть этого оператора

$$\Delta_{s^2} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

имеет специальное название - оператор Лапласа-Бельтрами. Давайте введем определение

**Definition 1.1** *Функция $f(\theta,\phi)$ называется гладкой на сфере $S^2$, если она является гладкой (бесконечно дифференцируемой) функцией своих переменных вне полюсов сферы: $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. В окрестности точек $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ гладкость проверяется проекцией на плоскость $(x, y)$. Т.е. в окрестности этих точек после замены переменных от $\theta$ и $\phi$ к $x$ и $y$ мы должны получить гладкую функцию $f(x, y)$.*

Есть и альтернативный (эквивалентный) способ проверить гладкость в окрестности полюсов - задать сферические координаты с другим набором полюсов.

Для оператора Лапласа-Бельтрами можно рассматривать краевую задачу

$$-\Delta_{s^2} f(\theta,\phi) = \lambda f(\theta,\phi),$$

причем функция $f(\theta,\phi)$ должна быть гладкая на сфере. Решения этой краевой задачи называются сферическими функциями. Будем искать сферические функции $f(\theta,\phi)$ в виде произведения

$$f(\theta,\phi) = A(\theta)B(\phi)$$

Разумеется мы не знаем найдем мы таким образом все сферические функции или только часть из них. Подставляя $f(\theta,\phi)$ в уравнение на собственные функции получим

$$-\Delta_{s^2} A(\theta)B(\phi) = \lambda A(\theta)B(\phi)$$

или

$$-B(\phi)\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}A(\theta) - A(\theta)\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}B(\phi) = \lambda A(\theta)B(\phi)$$

Видно, что переменные делятся

$$-\frac{1}{A(\theta)}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}A(\theta) - \lambda\sin^2\theta = \frac{1}{B(\phi)}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}B(\phi) = -\mu$$

Т.е. $\mu$ не зависит от $\theta$, и $\phi$. Посмотрим на уравнение для $B(\phi)$

$$-\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}B(\phi) = \mu B(\phi)$$

Уравнение имеет решения вида

$$B(\phi) = e^{\pm i\sqrt{\mu}\phi}$$

Если мы хотим, чтобы наша функция была гладкой на сфере, нужно выбрать $\sqrt{\mu}$ целым. Далее считаем, что $\mu = m^2$. Теперь посмотрим на уравнение для $A(\theta)$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}A(\theta) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}A(\theta) + \lambda A(\theta) = 0$$

Сделаем замену $z = \cos\theta$ (по удачному совпадению, это ровно то $z$ которое возникает для нашей сферы).

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{\partial z}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial z} = -\sin\theta\frac{\partial}{\partial z}$$

Тогда уравнение примет вид

$$\frac{\partial}{\partial z}(1-z^2)\frac{\partial}{\partial z}A - \frac{m^2}{1-z^2}A + \lambda A = 0$$

Мы получили обобщенное уравнение Лежандра. С учетом того, что мы хотим хотя бы ограниченности в полюсах (т.е. в точках $z = \pm 1$) мы получаем граничные условия для сингулярной краевой задачи, которую мы обсуждали в связи с обобщенным уравнением Лежандра. Таким образом, предположительно, сферическими функциями является следующий набор функций

$$Y_n^m(\theta,\phi) = e^{im\phi}P_n^{|m|}(\cos\theta), n = 0,1,2,...; \quad m = -n,-n+1,...n-1,n.$$

(Любая линейная комбинация этих функций при фиксированном $n$ и разных $m$ тоже подойдет.) Прежде всего убедимся, что те функции, которые мы указали в этом списке действительно являются сферическими функциями. Уравнение с оператором Лапласа-Бельтрами для них выполнено. Это результат наших вычислений. Проверим гладкость на сфере. Понятно, что достаточно посмотреть на окрестности полюсов. Посмотрим на зависимость наших функций от $x$ и $y$

$$x = \cos\phi\sin\theta, \quad y = \sin\phi\sin\theta.$$

Будем считать, что $m \geq 0$, случай отрицательных $m$ можно рассмотреть аналогично

$$e^{im\phi} = (x+iy)^m\frac{1}{\sin^m\theta}$$

$$Y_n^m(\theta,\phi) = e^{im\phi}(1-\cos^2\theta)^{m/2}(P_n)^{(m)}(\cos\theta) =$$
$$= (x+iy)^m\frac{1}{\sin^m\theta}(1-\cos^2\theta)^{m/2}(P_n)^{(m)}(\cos\theta) =$$
$$= (x+iy)^m(P_n)^{(m)}(\sqrt{1-x^2-y^2})$$

Видно, что эта функция гладкая по $x$ и $y$ в окрестности точки $x = 0$ и $y = 0$. Таким образом мы доказали, что найденный нами набор функций действительно обладает нужными свойствами.

Теперь посмотрим есть ли другие сферические функции. Докажем, что наш набор является ортогональным базисом в $L_2(S^2)$ со скалярным произведением

$$(f,g)_{L_2(S^2)} = \int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}d\theta\sin\theta f(\theta,\phi)\overline{g(\theta,\phi)}$$

Для начала, увидим ортогональность (и заодно сосчитаем нормировку)

$$(Y_n^m, Y_{n'}^{m'}) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta e^{im\phi} P_n^{|m|}(\cos\theta) e^{-im'\phi} P_{n'}^{|m'|}(\cos\theta) =$$

$$= \delta_{mm'} 2\pi \int_{-1}^{1} dz P_n^{|m|}(z) P_{n'}^{|m'|}(z) = \delta_{mm'} \delta_{nn'} 2\pi \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{2}{2n+1}$$

Ортогональность мы доказали. Посмотрим на полноту. Допустим у нас есть гладкая на сфере функция $f(\theta, \phi)$. Разложим ее для начала в ряд Фурье

$$f(\theta, \phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\phi} f_m(\theta)$$

а затем функцию $f_m(\theta)$ разложим по присоединенным полиномам Лежандра (мы знаем что присоединенные полиномы Лежандра образуют базис в $L_2(-1,1)$)

$$f(\theta, \phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} e^{im\phi} P_n^{|m|}(\cos\theta) f_{nm}$$

или

$$f(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} e^{im\phi} P_n^{|m|}(\cos\theta) f_{nm}$$

Эти равенства надо понимать в смысле $L_2$ нормы. Т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N_0$, что для всех $N > N_0$ будет выполнено

$$\| f(\theta, \phi) - \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=-n}^{n} e^{im\phi} P_n^{|m|}(\cos\theta) f_{nm} \|_{L_2(S^2)} < \varepsilon$$

Таким образом, наш набор функций составляет ортогональный базис в $L_2(S^2)$. Предположим, что нашлась какая-то сферическая функция помимо нашего набора. Здесь возможны две ситуации. Во первых помимо нашего набора собственных чисел

$$\lambda_n = n(n+1), n = 0, 1, 2...$$

найдется новое собственное число $\hat{\lambda}$. Оператор Лапласа-Бельтрами эрмитов

$$(\Delta_{S_2} f, g)_{L_2(S^2)} = (f, \Delta_{S_2} g)_{L_2(S^2)}$$

Собственные функции отвечающие разным собственным числам должны быть ортогональны. Т.е. наша новая собственная функция должна быть ортогональна базису. Следовательно, она ноль.

Другой вариант состоит в том, что новая собственная функция возникает для одного из наших собственных чисел, т.е. пространство собственных векторов для этого собственного числа становится более богатым. В этом случае в нашем пространстве можно выделить новый собственный вектор ортогональный всем имеющимся и опять получаем ортогональность базису.