Лекция 4

По поводу вопросов с предыдущей лекции

ВОПРОС: написать аналог теоремы Фукса для уравнения третьего порядка

$$w''' + p(z)w'' + q(z)w' + r(z)w = 0.$$

Формулировка аналога теоремы Фукса следующая: Уравнение

$$w''' + p(z)w'' + q(z)w' + r(z)w = 0.$$

имеет правильную особую точку $z = c$(т.е. три решения в виде односторонних рядов) тогда и только тогда, если коэффициент $p(z)$ имеет полюс не выше 1-го порядка, коэффициент $q(z)$ имеет полюс не выше второго порядка, а коэффициент $r(z)$ имеет полюс не выше третьего порядка.

Второй вопрос: Почему особая точка при дробно линейном преобразовании не меняет своего характера (т.е. остается правильной особой точкой). Необходимо также доказать, что показатели в особых точки сохраняются при такой замене.

Дело в том что степенное решение вида

$$w(z) = (z-c)^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-c)^k$$

после дробно линейного преобразования

$$z = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta}$$

решение будет иметь вид

$$w(\zeta) = \left(\frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta} - c\right)^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(\frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta} - c\right)^k$$

или

$$w(\zeta) = (\zeta - \tilde{c})^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\zeta - \tilde{c})^k,$$

где

$$\tilde{c} = \frac{\beta - c\delta}{c\gamma - \alpha}$$

Таким образом, мы видим, что решение после замены будет иметь степенную особенность с тем же показателем. Отдельно можно посмотреть случай присоединенного вектора.

Третий вопрос: восстановить гипергеометрическое уравнение по символу Римана

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1-c & c-a-b & b \end{pmatrix}$$

Как мы уже договаривались, коэффициенты $p(z)$ и $q(z)$ являются рациональными функциями их разложение по главным частям имеет вид

$$p(z) = \frac{p_0^0}{z} + \frac{p_0^1}{z-1}$$

$$q(z) = \frac{q_0^0}{z^2} + \frac{q_1^0}{z} + \frac{q_0^1}{(z-1)^2} + \frac{q_1^1}{z-1}$$

Посмотрим на уравнение на показатели в окрестности точки ноль

$$\rho(\rho-1) + p_0^0\rho + q_0^0 = 0$$

Корни этого уравнения: 0 и $1-c$. Поэтому $q_0^0 = 0$, $p_0^0 = c$ Аналогично в точке $z = 1$

$$\rho(\rho-1) + p_0^0\rho + q_0^0 = 0$$

Корни этого уравнения: 0 и $c-a-b$. Поэтому $q_0^1 = 0$, $p_0^1 = 1+a+b-c$ Т.е.

$$p(z) = \frac{c}{z} + \frac{1+a+b-c}{z-1}$$

$$q(z) = \frac{q_1^0}{z} + \frac{q_1^1}{z-1}$$

С учетом того, что $q(z)$ должно иметь на бесконечности ноль второго порядка, ясно что

$$q_1^0 = -q_1^1$$

Таким образом,

$$q(z) = -\frac{q_1^0}{z(z-1)}$$

Но с другой стороны уравнение для показателей на бесконечности имеет вид

$$\rho(\rho+1) - p_0^\infty\rho + q_0^\infty = 0$$

причем

$$q_0^\infty = -q_1^0$$

Корни квадратного уравнения: a и b. Поэтому

$$-q_1^0 = ab$$

Окончательно, получим гипергеометрическое уравнение

$$z(z-1)w'' + ((a+b+1)z-c)w' + abw = 0$$

1 Уравнение Лежандра

Рассмотрим уравнение Лежандра

$$((1-z^2)w')' + \nu(\nu+1)w = 0,$$

(как мы увидим в дальнейшем, наиболее важные приложения этого уравнения связаны со сферическими функциями) Легко видеть, что уравнение имеет три правильные особые точки: 1, -1 и ∞. Таким образом, оно принадлежит классу Фукса. Соответствующий символ Римана имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \infty \\ 0 & 0 & \nu+1 \\ 0 & 0 & -\nu \end{pmatrix}$$

Следовательно, в окрестности точки $z = 1$ есть одно голоморфное решение, а второе (так как показатели совпали) неизбежно будет иметь логарифмическое поведение в окрестности этой точки (поскольку матрица монодромии имеет присоединенный вектор).

Введем стандартное решение этого уравнения - $P_\nu(z)$. По определению это голоморфное в окрестности точки $z = 1$ решение, удовлетворяющее условию

$$P_\nu(1) = 1$$

Оказывается, что для функции $P_\nu(z)$ можно написать интегральное представление (интеграл Шлефли)

$$P_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i 2^\nu} \int_\gamma \frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}} dt$$

Здесь γ контур вокруг точек $t = 1$ и $t = z$ взятый в положительном направлении (рис.0). Многозначное выражение фиксировано следующим образом. Для отношения

$$\left(\frac{t-1}{t-z}\right)^\nu$$

проведен разрез от $t = 1$ до $t = z$ и фиксировано условие при $t \to \infty$

$$\left(\frac{t-1}{t-z}\right)^\nu \to 1$$

Для $(t+1)^\nu$ разрез проведен от -1 до минус бесконечности и на верхнем берегу разреза значение $\ln(t-1)$ имеет мнимую часть π. Голоморфность интеграла Шлефли в окрестности точки $z = 1$ видна из самой формулы (видно что мы имеем дело с однозначной функцией ограниченной в окрестности этой точки). Значение при $z = 1$ тоже легко контролируется. Дело в том, что при $z = 1$ в подинтегральной функции происходит сокращение и все сводится к вычислению интеграла по вычетам в полюсе первого порядка.

ВОПРОС: проверить выполнение уравнения Лежандра для интеграла Шлефли.

Функция Лежандра по определению голоморфна в точке $z = 1$. В окрестности точки $z = -1$ эта функция должна быть линейной комбинацией двух решений уравнения Лежандра построенных в окрестности точки $z = -1$. Одно из этих решений голоморфно в окрестности точки $z = -1$ а другое имеет логарифмическое поведение. Особый интерес вызывает ситуация когда существует ненулевое решение голоморфное одновременно двух точках в $z = -1$ и $z = 1$. Эта ситуация соответствует сингулярной задаче Штурма-Лиувилля

$$-((1-z^2)y')' = \lambda y,$$

y ограничено в точках $z = -1$ и $z = 1$.

Задача, как обычно, состоит в том чтобы найти значения λ при которых есть ненулевые решения уравнения удовлетворяющие граничным условиям. Сингулярность ее в том, что функция $(1 - z^2)$ обращается в ноль на концах промежутка.

Ответ на вопрос когда есть решения этой краевой задачи можно получить глядя на асимптотику функции Лежандра при $z \to -1$. Если асимптотика логарифмическая, то решения нет. Если асимптотика ограничена, то функция Лежандра и дает решение краевой задачи.

2 Поведение функции Лежандра в окрестности точки $z = -1$

Итак мы хотим вычислить асимптотику функции Лежандра

$$P_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i 2^\nu} \int_\gamma \frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}} dt$$

при $z \to -1$. При этом мы будем пренебрегать погрешностями $O(1)$. Прежде всего посмотрим откуда берется не ограниченная асимптотика? Контур конечный. Единственная проблема в том, что контур "зажимается"между особыми точками $t = -1$ и $t = z$. На остальной части контура (в отдалении от этих точек) подынтегральное выражение ограничено. Таким образом, с учетом нашей погрешности $O(1)$ мы можем оставить только кусочек контура (рис.1) между особыми точками,а все остальное отдать в погрешность. Мы также можем считать предел к точке $z = -1$ по фиксированному направлению (по отрицательной полуоси) (рис.2). В этом случае мы видим, что под знаком интеграла у нас три функции

$$(t-1)^\nu$$
$$(t+1)^\nu$$

и

$$\frac{1}{(t-z)^{\nu+1}}$$

Вторая и третья функция между точками $t = -1$ и $t = z$ меняются быстро,а первая относительно медленно. Давайте первую функцию фиксируем ее значением в точке $t = -1$.

Докажем тогда, что

$$P_\nu(z) = \frac{(-2)^\nu}{2\pi i 2^\nu} \int_{\gamma_0} \frac{(t+1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}} dt + O(1)$$

здесь γ_0 кусочек контура γ между точками $t = -1$ и $t = z$. Действительно, то что можно оставить только кусок контура γ мы уже обсуждали. Проведем контур так чтобы он прошел между особыми точками на одинаковом расстоянии от особых точек (рис.3).Если посмотреть на разность нашего упрощенного подынтегрального выражения и исходного

$$\frac{1}{2\pi i 2^\nu} \int_{\gamma_0} \frac{(-2)^\nu (t+1)^\nu - (t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}} dt$$

то видно что на нашем контуре в этой разности подынтегральное выражение будет ограниченным. Это и доказывает наше утверждение.

Далее, сделаем замену переменной в интеграле $s = \frac{t+1}{z+1}$

$$P_\nu(z) = \frac{e^{i\pi\nu}}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{s^\nu}{(s-1)^{\nu+1}} dt + O(1)$$

(контур на рис 4.) В новых переменных контур не зажат между особыми точками. Поэтому единственная причина неограниченной асимптотики в том что сам контур стал большим. Конечный кусок контура между точками можно выбросить. Остаются два интеграла

$$\frac{e^{i\pi\nu}}{2\pi i} \int_{\frac{b}{z+1}}^{a} \frac{s^\nu}{(s-1)^{\nu+1}} dt$$

и

$$\frac{e^{i\pi\nu}}{2\pi i} \int_{\overline{a}}^{\frac{\overline{b}}{z+1}} \frac{s^\nu}{(s-1)^{\nu+1}} dt$$

Вклад в асимптотику дают только большие s поэтому подынтегральное выражение можно заменить асимптотикой при больших s. В итоге, с учетом веточек наших многозначных функций получим

$$\frac{e^{i\pi\nu}}{2\pi i} \int_{\frac{b}{z+1}}^{a} \frac{1}{s} dt = \frac{e^{i\pi\nu}}{2\pi i} (\ln a - \ln \frac{b}{z+1})$$

и

$$\frac{e^{-i\pi\nu}}{2\pi i} \int_{\overline{a}}^{\frac{\overline{b}}{z+1}} \frac{1}{s} dt = \frac{e^{-i\pi\nu}}{2\pi i} (\ln \frac{\overline{b}}{z+1} - \ln \overline{a})$$

Окончательно,

$$P_\nu(z) = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi} \ln(z+1) + O(1)$$

Таким образом, ответ на вопрос при каких ν есть решения нашей краевой задачи простой: ν должно быть целым. Достаточно рассмотреть $\nu = 0, 1, 2.....$ Дело в том, что замена ν на $-\nu-1$ не меняет уравнение Лежандра и

$$P_\nu(z) = P_{-\nu-1}(z)$$

Далее, если $\nu = n = 0, 1, 2....$, то интеграл

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i 2^n} \int_\gamma \frac{(t^2-1)^n}{(t-z)^{n+1}} dt$$

можно вычислить по вычетам

$$P_n(z) = \frac{1}{n! 2^n} \frac{d^n}{dz^n} (z^2-1)^n$$

Видно, что $P_n(z)$ - полином степени n. Это полином Лежандра.