Лекция 3

По поводу вопросов с предыдущей лекции

Вопрос по поводу оценки

$$|c_k| \leq MR^{-k}|(F(\rho+k))^{-1}|(k(|\rho|+1)+k(k-1)/2)$$

Дело в том, что асимптотически при больших $k$ индукция работает

$$(F(\rho+k))^{-1}|(k(|\rho|+1)+k(k-1)/2) \simeq 1/2$$

А для конечного числа членов можно подобрать подходящую константу $M$.

Второй вопрос о наличии второго решения нужного вида решается за счет того, что если одно решение уравнения (1) Вам известно, то второе можно написать в виде явной квадратуры (см 2-ой курс).

В прошлый раз мы остановились на том, что доказали теорему Фукса. Давайте еще раз сформулируем следствия теоремы Фукса, которые мы зафиксировали в ее доказательства. Если $z = c$ - правильная особая точка, то верны следующие утверждения.

**Corollary 0.1** *Показатели $\rho_1, \rho_2$ являются корнями квадратного уравнения*

$$\rho(\rho-1)+p_0\rho+q_0=0$$

**Corollary 0.2** *Если $\rho_1-\rho_2$ не являются целым числом, то нет присоединенного вектора. Оба решения степенные*

**Corollary 0.3** *Если $\rho_1-\rho_2$ целое число, то для показателя с большей вещественной частью логарифма не будет.*

**Corollary 0.4** *Если $\rho_1=\rho_2$ , то присоединенный вектор в матрице монодромии заведомо есть и одно из решений с логарифмом.*

ВОПРОС: написать аналог теоремы Фукса для уравнения третьего порядка

$$w'''+p(z)w''+q(z)w'+r(z)w=0.$$

# 1 Класс Фукса

Теперь мы рассмотрим класс уравнений

$$w''+p(z)w'+q(z)w=0. \tag{1}$$

в котором есть только правильные особые точки. Этот класс называется классом Фукса. Поскольку мы изучаем дифференциальные уравнения с точки зрения комплексного анализа, то естественно рассмотреть поведение наших решений в бесконечности.

Договоримся, о том что точка $z = \infty$ является правильной особой точкой если в окрестности этой точки (т.е. при $|z| > R$) уравнение (1) имеет два решения вида

$$w_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k-\rho_1}, \quad c_0 \neq 0$$

$$w_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^{-k-\rho_2}, \quad d_0 \neq 0$$

В случае, если матрица монодромии (точки $z = \infty$) имеет присоединенный вектор, второе решение будет с логарифмом

$$w_2(z) = \ln z w_1(z) + z^{-\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^{-k}, \quad d_0 \neq 0$$

Теорему Фукса можно переделать на точку бесконечность. Для достаточно провести преобразование инверсии для переменной $z$

$$s = \frac{1}{z}$$

После замены переменной

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{ds}\frac{ds}{dz} = -\frac{dw}{ds}\frac{1}{z^2} = -\frac{dw}{ds}s^2$$

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{d^2w}{ds^2}s^4 + \frac{dw}{ds}2s^3$$

мы получим следующее уравнение

$$\frac{d^2w}{ds^2} + \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}p\left(\frac{1}{s}\right)\right)\frac{dw}{ds} + \frac{1}{s^4}q\left(\frac{1}{s}\right)$$

Таким образом после замены новые коэффициенты уравнения имеют вид

$$\tilde{p}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}p\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$\tilde{q}(s) = \frac{1}{s^4}q\left(\frac{1}{s}\right)$$

Видно, что критерием правильности особой точки является следующее условие на коэффициенты $p$ и $q$: $p(z)$ должен иметь на бесконечности ноль не ниже 1-го порядка, $q(z)$ должен иметь на бесконечности ноль не ниже 2-го порядка.

Чтобы точка $z = \infty$ была вообще не особой точкой необходимо потребовать, чтобы коэффициент $p(z)$ имел на бесконечности разложение вида

$$p(z) = \frac{2}{z} + \sum_{k=2}^{\infty} f_k z^{-k}$$

(т.е. скажем $p(z) = 0$ не подходит), а $q(z)$ должен иметь на бесконечности ноль не ниже 4-го порядка. Уравнение на показатели имеет следующий вид

$$\rho(\rho + 1) - p_0\rho + q_0 = 0$$

Оно отличается от стандартного заменой $\rho$ на $-\rho$.

Посмотрим как выглядят уравнения класса Фукса с несколькими особыми точками. Прежде всего вспомним комплексный анализ и то, что можно с помощью дробно линейного преобразования перевести три любые различные точки в понравившиеся Вам точки на комплексной плоскости.

ВОПРОС: Почему особая точка при таком преобразовании не меняет своего характера (т.е. остается правильной особой точкой). Необходимо также доказать, что показатели в особых точки сохраняются при такой замене.

Рассмотрим случай уравнения без особых точек. Оказывается, что таких уравнений нет. Действительно коэффициенты $p(z)$ и $q(z)$ должны быть целыми функциями (поскольку нет конечных особых точек). С другой стороны точка $z = \infty$ также должна быть не особой, поэтому пределы на бесконечности коэффициентов $p(z)$ и $q(z)$ должны быть равны нулю. Т.е. получается, $p(z) = 0$ и $q(z) = 0$. Но мы знаем, что $p(z) = 0$ не подходит для не особой точки в бесконечности.

В случае одной правильной особой точки, мы применяя дробно линейное преобразование можем перевести ее в бесконечность. Тогда первая часть наших рассуждений

<Действительно коэффициенты $p(z)$ и $q(z)$ должны быть целыми функциями (поскольку нет конечных особых точек). С другой стороны точка $z = \infty$ также должна быть не особой, поэтому пределы на бесконечности коэффициентов $p(z)$ и $q(z)$ должны быть равны нулю.Т.е. получается, $p(z) = 0$ и $q(z) = 0$.>

проходит без изменений. А вот вывод состоит в том, что такое уравнение с единственной правильной особой точкой в бесконечности - одно

$$w'' = 0$$

Теперь рассмотрим случай двух правильных особых точек. Применяя дробно линейное преобразование мы можем перевести их в бесконечность и в ноль. Вспоминая комплексный анализ мы видим, что функции $p(z)$ и $q(z)$ имеют только полюса в качестве особенностей, поэтому они должны быть рациональными функциями. Давайте напишем для них разложения по главным частям. У функции $p(z)$ единственная особая точка $z = 0$ и она имеет там полюс первого порядка, предел ее на бесконечности - ноль. Поэтому

$$p(z) = \frac{p_0}{z}$$

Аналогично у функции $q(z)$ единственная особая точка $z = 0$ и она имеет там полюс второго порядка, предел ее на бесконечности - ноль. Поэтому

$$q(z) = \frac{q_0}{z^2} + \frac{q_1}{z}$$

Но на бесконечности должен быть ноль второго порядка. Следовательно,

$$q(z) = \frac{q_0}{z^2}$$

Таким образом, уравнение имеет вид

$$w'' + \frac{p_0}{z}w' + \frac{q_0}{z^2}w = 0$$

Легко видеть, что это уравнение Эйлера.

Содержательные случаи возникают для 3-х правильных особых точек. Значительная часть специальных функций отвечает именно такой ситуации, или к ней в итоге сводится. Кроме того, как мы увидим в дальнейшем в случае трех правильных особых точек для решений уравнения можно найти явные квадратуры, так называемые интегральные представления. Подавляющая часть специалистов убеждена, что для 4-х или большего числа особых точек найти интегральные представления для решений невозможно (хотя доказательства не существует). Таким образом, случай трех правильных особых точек является ключевым. Для этой ситуации нет явных решений (как для 2-х особых точек) но есть интегральные представления.

Без ограничения общности, можно считать что наши три правильные особые точки переведены в точки $0, \quad 1$ и $\infty$. Давайте введем табличку, которая имеет название -символ Римана

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ \rho_1^0 & \rho_1^1 & \rho_1^\infty \\ \rho_2^0 & \rho_2^1 & \rho_2^\infty \end{pmatrix}$$

В первой строке приведены особые точки, во второй и третьей строке приведены показатели соответствующих точек.

Выясняется, что этот символ можно упростить. Прежде всего, сумму всех показателей в особых точках можно сосчитать. Давайте рассмотрим несколько более общую ситуацию, когда есть $n$ конечных особых $z_1 ... z_n$ точек с показателями $\rho_{1,2}^1, ..., \rho_{1,2}^n$ и особая точка в бесконечности с показателями $\rho_{1,2}^\infty$

**Lemma 1.1** *Сумма показателей удовлетворяет соотношению*

$$\sum_{k=1}^{n} (\rho_1^k + \rho_2^k) + \rho_1^\infty + \rho_2^\infty = n - 1$$

Для доказательства заметим опять, что коэффициенты $p(z)$ и $q(z)$ являются рациональными функциями их разложение по главным частям имеет вид

$$p(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_0^k}{z - z_k}$$

$$q(z) = \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{q_0^k}{(z - z_k)^2} + \frac{q_1^k}{z - z_k} \right)$$

Показатели $\rho^k_{1,2}$ являются корнями уравнения

$$\rho(\rho-1)+p^k_0\rho+q^k_0=0$$

Поэтому

$$\rho^k_1+\rho^k_2=1-p^k_0$$

Аналогично, показатели $\rho^\infty_{1,2}$ являются корнями уравнения

$$\rho(\rho+1)-p^\infty_0\rho+q^\infty_0=0$$

Поэтому

$$\rho^\infty_1+\rho^\infty_2=-1+p^\infty_0,$$

Но

$$p^\infty_0=\sum_{k=1}^n p^k_0$$

Таким образом

$$\sum_{k=1}^n(\rho^k_1+\rho^k_2)+\rho^\infty_1+\rho^\infty_2=\sum_{k=1}^n(1-p^k_0)-1+\sum_{k=1}^n p^k_0=n-1$$

Лемма доказана

Возвращаемся к случаю трех особых точек. Мы теперь знаем, что сумма шести показателей равна 1. Дальнейшие упрощения нашего символа Римана связаны с заменой неизвестной функции. Если у нас есть уравнение с символом Римана вида

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ \rho^1_1 & \rho^2_1 & \rho^3_1 \\ \rho^1_2 & \rho^2_2 & \rho^3_2 \end{pmatrix}$$

то замена

$$v(z)=\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right)^\sigma w(z)$$

приводит символ Римана к виду

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ \rho^1_1+\sigma & \rho^2_1-\sigma & \rho^3_1 \\ \rho^1_2+\sigma & \rho^2_2-\sigma & \rho^3_2 \end{pmatrix}$$

Аналогично, можно провести замену

$$v(z)=\left(\frac{z-z_2}{z-z_3}\right)^\sigma w(z)$$

За счет таких действий можно занулить два коэффициента из шести, кроме того по-прежнему сумма оставшихся коэффициентов равна 1. Поэтому, остается три свободных параметра. Принято сводить символ Римана с 3-мя правильными особыми точками к следующему виду

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1-c & c-a-b & b \end{pmatrix}$$

Это символ Римана для гипергеометрического уравнения.

ВОПРОС Получить это уравнение из символа Римана.