Лекция 12

ВОПРОС: показать, что

$$e^{im\phi}J_{|m|}(\frac{r_n^{|m|}}{R}r), \quad \lambda_n = (\frac{r_n^{|m|}}{R})^2, \quad m \in \mathbf{Z}, n = 1, 2, ...$$

весь спектр краевой задачи

$$-\Delta\psi = \lambda\psi$$

$$\psi|_{r=R} = 0$$

Других собственных чисел и собственных функций нет.

Дело в том, что наш набор функций ортогонален относительно скалярного произведения в круге

$$(f, g)_{l_2(U)} = \int_{|\overrightarrow{x}|<R} f\overline{g}d\overrightarrow{x}$$

и также обладает свойством полноты.

ВОПРОС: докажите что если $\nu > 0$, то все корни функции Бесселя вещественны и расположены симметрично относительно нуля.

Из наших построений ясно, что

$$r_n^\nu = \sqrt{\lambda_n}l$$

Таким образом, достаточно показать, что

$$\sqrt{\lambda_n} \in \mathbf{R}$$

Вещественность λ_n следует из того, что оператор Штурма-Лиувилля эрмитов. Отдельно надо доказать , что λ_n положительно. Для этого рассмотрим спектральное уравнение

$$-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}x\frac{d\psi_n}{dx} + \frac{\nu^2}{x^2}\psi_n = \lambda_n\psi_n \tag{1}$$

Домножим его на $x\psi_n$ и проинтегрируем 0 до l

$$\int_0^l(-\psi_n\frac{d}{dx}x\frac{d\psi_n}{dx} + \frac{\nu^2}{x}(\psi_n)^2)dx = \lambda_n\int_0^l x(\psi_n)^2dx$$

Проинтегрируем по частям в первом слагаемом

$$\int_0^l(x(\frac{d\psi_n}{dx})^2 + \frac{\nu^2}{x}(\psi_n)^2)dx = \lambda_n\int_0^l x(\psi_n)^2dx$$

Теперь видно, что λ_n положительно.

Сегодня мы продолжим рассматривать приложения краевой задачи для для уравнения Бесселя. Для начала, еще один вопрос.

ВОПРОС: Напишите (в терминах решения уравнения Бесселя) фундаментальное решение $\varepsilon(\overrightarrow{x})$ для уравнения Гельмгольца на плоскости

$$\Delta\varepsilon + k^2\varepsilon = \delta(\overrightarrow{x})$$

1 Разделение переменных для уравнения Гельмгольца в сферических координатах координатах

Рассмотрим деление переменных в сферических координатах для уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

Будем искать u в виде

$$u(r,\phi) = A(r)B(\theta,\phi)$$

$$B(\theta,\phi)\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}A(r) + A(r)\frac{1}{r^2}\Delta_{S^2}B(\theta,\phi) + k^2A(r)B(\theta,\phi) = 0$$

Делим переменные

$$\frac{1}{A(r)}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}A(r) + k^2r^2 = -\frac{1}{B(\theta,\phi)}\Delta_{S^2}B(\theta,\phi) = \mu$$

Посмотрим на уравнение для $B(\theta,\phi)$

$$-\Delta_{S^2}B(\theta,\phi) = \mu B(\theta,\phi)$$

Если мы хотим гладкое на сфере решение, то мы получаем сферическую функцию. Т.е. мы должны взять $\mu = l(l+1)$, а решение будет иметь вид

$$B(\theta,\phi) = Y_l(\theta,\phi) = \sum_{m=-l}^{l} c_{lm}Y_l^m(\theta,\phi)$$

Следовательно уравнение на $A(r)$ будет иметь вид

$$A'' + \frac{2}{r}A' + (k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2})A = 0$$

Если взять

$$A(r) = \frac{1}{\sqrt{r}}Z(kr)$$

мы получим уравнение Бесселя для $Z(z)$

$$z^2Z'' + zZ' + (z^2 - (l+\frac{1}{2})^2)Z = 0$$

Таким образом,

$$A(r) = \frac{1}{\sqrt{r}}Z_{l+\frac{1}{2}}(kr)$$

где $Z_{l+\frac{1}{2}}$ - решение уравнения Бесселя со значком $l+\frac{1}{2}$.

Аналогично можно исследовать спектр оператора Лапласа в шаре. Рассмотрим краевую задачу в круге радиуса R на собственные функции и собственные значения следующего вида

$$-\Delta\psi = \lambda\psi$$

$$\psi|_{r=R} = 0$$

Видно, что спектральное уравнение полностью соответствует уравнению Гельмгольца для $k^2 = \lambda$. Таким образом, наши предыдущие построения работают для данной спектральной задачи. Дополнительно мы должны потребовать гладкость в центре шара (за счет этого наше произвольное решение уравнения Бесселя $Z_{l+\frac{1}{2}}$ становится функцией Бесселя $J_{l+\frac{1}{2}}$) и равенство нулю на границе шара

$$J_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}R) = 0$$

т.е. мы получаем условие на спектр

$$\lambda_n^l = (\frac{r_n^{l+\frac{1}{2}}}{R})^2$$

Таким образом, мы получили следующий набор собственных функций и собственных чисел

$$\frac{1}{\sqrt{r}} J_{l+\frac{1}{2}}(\frac{r_n^{l+\frac{1}{2}}}{R} r) Y_l^m(\theta, \phi), \quad \lambda_n^l = (\frac{r_n^{l+\frac{1}{2}}}{R})^2, \quad l = 0, 1, 2, ..., \quad n = 1, 2, ..., \quad |m| \leq l.$$

Из полноты данной системы функций в норме L_2 в шаре следует, что других собственных функций и собственных чисел нет.

ВОПРОС: Есть железное ядро, которое положили в печь и нагрели так, что температура ядра зависит только от расстояния до его центра (но не зависит от углов в соответствующих сферических координатах). Затем это ядро бросили в воду с нулевой температурой. С помощью метода Фурье найдите температуру в ядре со временем.

2 Преобразование Фурье-Бесселя

Посмотрим еще на одну краевую задачу для уравнения Бесселя. На промежутке $(0, \infty)$. Мы по-прежнему считаем $\nu \geq 0$. Теперь задача будет "дважды"сингулярная. Во первых как и раньше у нас (по сравнению со стандартной задачей Штурма-Лиувилля) проблема в точке ноль. Но теперь к этому добавляется неограниченность промежутка. В этом случае надо ожидать эффекта аналогичного тому, который возникает при стремлении к бесконечности промежутка, на котором строится ряд Фурье. Мы знаем, что в этом случае возникает преобразование Фурье. В нашем случае при $l \to \infty$ мы получим преобразование Фурье-Бесселя:

$$g(k) = \int_0^\infty x J_\nu(kx) f(x) dx,$$

$$f(x) = \int_0^\infty k J_\nu(kx) g(k) dk.$$

Мы считаем f и g гладкими, хорошо убывающими функциями. Чтобы доказать эти формулы посмотрим на соотношения, которые мы получили для промежутка $(0, l)$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_\nu(\frac{r_n^\nu}{l} x) \tag{2}$$

$$c_n = \frac{2\int_0^l x J_\nu(\frac{r_n^\nu}{l} x) f(x) dx}{l^2 (J_{\nu+1}(r_n))^2}$$

в пределе при $l \to \infty$. Во первых видно, при $l \to \infty$ слагаемые суммы в формуле (2) становятся малыми. Это позволяет считать, что вклад в сумму конечного числа первых слагаемых асимптотически мал. Поскольку вклад первых слагаемых несущественен при $l \to \infty$, мы при вычислении асимптотики можем считать $k \gg 1$. Таким образом, мы можем использовать для функции Бесселя (и для ее нулей) асимптотические формулы по аргументу. Введем набор точек

$$k_n = \frac{r_n^\nu}{l}$$

При стремлении $l \to \infty$ этот набор точек становится всюду плотным на положительной полуоси. Поэтому его можно использовать для интегральной суммы.

Перепишем формулу для коэффициента c_n в виде

$$c_n l^2 (J_{\nu+1}(r_n))^2/2 = \int_0^l x J_\nu(\frac{r_n^\nu}{l} x) f(x) dx$$

Из сравнения формулы для функции g и этой формулы видно, что функцию g надо брать в виде

$$g(k_n) = c_n l^2 (J_{\nu+1}(r_n))^2/2$$

Или, с учетом асимптотики функции Бесселя,

$$g(k_n) \sim c_n l^2 \frac{1}{\pi r_n}$$

Тогда асимптотически при больших l формула для коэффициентов c_n перейдет в формулу для функции g

$$g(k) = \int_0^\infty x J_\nu(kx) f(x) dx$$

Теперь займемся обратной формулой. Рассмотрим интегральную сумму для интеграла

$$f(k) = \int_0^\infty k J_\nu(kx) g(k) dk.$$

Используя для разбиения на промежутки точки k_n

$$\int_0^\infty k J_\nu(kx) g(k) dk \sim \sum (k_{n+1} - k_n) k_n J_\nu(k_n x) g(k_n)$$

Давайте увидим, что при $n \geq 1$ асимптотически члены этой суммы такие же как и для суммы

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_\nu(k_n x)$$

Т.е. сравним асимптотики $(k_{n+1} - k_n) k_n g(k_n)$ и c_n. Действительно,

$$k_{n+1} - k_n \sim \frac{\pi}{l}$$

Тогда

$$(k_{n+1} - k_n) k_n g(k_n) \sim \frac{\pi}{l} \frac{r_n^\nu}{l} c_n l^2 \frac{1}{\pi r_n} \sim c_n$$