Лекция 12 ВОПРОС: в каком секторе действует эта асимптотика и почему?

Асимптотика для функций Ханкеля

$$H_\nu^{(1)} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z-\frac{\pi}{4}(2\nu+1))}$$

$$H_\nu^{(2)} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i(z-\frac{\pi}{4}(2\nu+1))}$$

Верна почти по всем направлениям за исключением небольшого сектора вокруг отрицательной полуоси. Доказательство вытекает из теоремы о неправильной особой точке и метода перевала (см. замечание в начале 10-й лекции)

ВОПРОС: доказать разложение

$$N_\nu = \frac{\cos(\pi\nu) J_\nu - J_{-\nu}}{\sin(\pi\nu)}$$

Поскольку слева и справа стоят решения уравнения Бесселя, для доказательства этого соотношения достаточно сравнить асимптотики при больших z для левой и правой части.

1 Краевые задачи для уравнения Бесселя

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}x\frac{d\psi}{dx} + \frac{\nu^2}{x^2}\psi = \lambda\psi \tag{1}$$

Легко видеть, что оно сводится к уравнению Бесселя

$$z^2 Z'' + zZ' + (z^2 - \nu^2)Z = 0$$

заменой

$$\psi(x,\lambda) = Z(\sqrt{\lambda}x)$$

Для уравнения (1) можно рассматривать краевые задачи на разных промежутках:

$$(0,\infty), \quad (0,l), \quad (l,\infty), \quad (l_1,l_2)$$

Все они возникают в приложениях. Мы рассмотрим две из них на промежутках

$$(0,\infty), \quad (0,l)$$

Начнем мы с краевой задачи на промежутке $(0,l)$

$$-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}x\frac{d\psi}{dx} + \frac{\nu^2}{x^2}\psi = \lambda\psi$$

$$|\psi(0)| < const, \quad \psi(l) = 0$$

Это сингулярная задача Штурма-Лиувилля. Будем считать, что $\nu > 0$, тогда решение краевой задачи пропорционально функции Бесселя $J_\nu(\sqrt{\lambda}x)$. Уравнение на собственные числа имеет вид

$$J_\nu(\sqrt{\lambda}l) = 0$$

Следовательно, собственные числа λ_n определяются корнями функции Бесселя r_n^ν

$$\lambda_n = \frac{(r_n^\nu)^2}{l^2}$$

ВОПРОС: докажите что если $\nu > 0$, то все корни функции Бесселя вещественны и расположены симметрично относительно нуля.

Давайте перенумеруем все положительные корни функции Бесселя в порядке возрастания. Тогда решение нашей краевой задачи следующее

$$\lambda_n = \frac{(r_n^\nu)^2}{l^2}, \quad \psi_n = J_\nu(\frac{r_n^\nu}{l}x), \quad n = 1, 2, ...$$

Как обычно необходимо посмотреть на свойства ортогональности, полноты и нормировки полученной системы собственных функций. Ортогональность возникает из стандартных построений для задачи Штурма-Лиувилля с весом:

$$-\frac{d}{dx}x\frac{d\psi_n}{dx} + \frac{\nu^2}{x}\psi_n = \lambda_n x\psi_n$$

$$-\frac{d}{dx}x\frac{d\psi_m}{dx} + \frac{\nu^2}{x}\psi_m = \lambda_m x\psi_m$$

Домножаем первое уравнение на ψ_m второе на ψ_n, вычитаем друг и друга и интегрируем на интервале от 0 до l

$$\int_0^l (-\psi_m\frac{d}{dx}x\frac{d\psi_n}{dx} + \psi_n\frac{d}{dx}x\frac{d\psi_m}{dx})dx = (\lambda_n - \lambda_m)\int_0^l x\psi_m\psi_n dx$$

или

$$(-\psi_m x\frac{d\psi_n}{dx} + \psi_n x\frac{d\psi_m}{dx})|_0^l = (\lambda_n - \lambda_m)\int_0^l x\psi_m\psi_n dx$$

Но подстановка с учетом вида функций ψ_m равна нулю. Таким образом, приходим к ортогональности наших собственных функций с весом

$$\int_0^l x\psi_m\psi_n dx = 0, \quad n \neq m$$

Сложнее с доказательством полноты. Для доказательства полноты надо провести анализ для сингулярной задачи Штурма-Лиувилля аналогичный тому, который мы провели для обычной краевой задачи, когда разложили резольвенту по главным частям рада Лорана. Мы не будем заниматься этими доказательствами и просто зафиксируем результат. Произвольная функция f из $L_2(0,l)$ раскладывается по собственным функциям нашей краевой задачи в норме $L_2(0,l)$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k(x)$$

Коэффициенты разложения можно найти с учетом ортогональности наших собственных функций. Домножим левую и правую часть нашего равенства на $x\psi_m$ и проинтегрируем на интервале от 0 до l

$$\int_0^l x\psi_m f(x)dx = \int_0^l x\psi_m \sum_{k=1}^{\infty} c_k\psi_k(x)dx = \delta_{km} c_m \int_0^l x(\psi_m)^2 dx$$

Следовательно,

$$c_m = \frac{\int_0^l x\psi_m f(x)dx}{\int_0^l x(\psi_m)^2 dx}$$

Возникает вопрос о нормировке собственных функций. В отличие от полиномов Лежандра, мы не сможем вычислить соответствующий интеграл, просто глядя на подынтегральную функцию. Нам придется использовать прием связанный с задачей Штурма-Лиувилля. Следует отметить, что большая часть наших построений будет иметь универсальный характер и применима к любой задаче Штурма-Лиувилля.

Напишем спектральное уравнение

$$-\frac{d}{dx} x \frac{d\psi}{dx} + \frac{\nu^2}{x}\psi = \lambda x \psi$$

вместе с его производной по λ

$$-\frac{d}{dx} x \frac{d\dot\psi}{dx} + \frac{\nu^2}{x}\dot\psi = \lambda x \dot\psi + x\psi, \quad \dot\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\lambda}$$

(мы пока считаем λ произвольным). Домножаем первое уравнение на $\dot\psi$ второе на ψ, вычитаем друг из друга и интегрируем на интервале от 0 до l

$$\int_0^l (\dot\psi \frac{d}{dx} x \frac{d\psi}{dx} - \psi \frac{d}{dx} x \frac{d\dot\psi}{dx}) dx = \int_0^l x\psi^2 dx$$

или

$$(\dot\psi x \frac{d\psi}{dx} - \psi x \frac{d\dot\psi}{dx})|_0^l = \int_0^l x\psi^2 dx$$

Теперь будем считать, что

$$\psi(x,\lambda) = J_\nu(\sqrt{\lambda}x)$$

Тогда подстановка в точке $x = 0$ будет равна нулю. Следовательно

$$(\frac{x^2}{2\sqrt{\lambda}} J_\nu'(\sqrt{\lambda}x)\sqrt{\lambda} J_\nu'(\sqrt{\lambda}x) - J_\nu(\sqrt{\lambda}x) x \frac{d\dot\psi}{dx})|^{x=l} = \int_0^l x J_\nu^2(\sqrt{\lambda}x)dx$$

Теперь положим

$$\lambda = \lambda_n$$

В этом случае второе слагаемое из подстановки исчезает, и мы имеем

$$\frac{l^2(J'_\nu(\sqrt{\lambda_n}l))^2}{2} = \int_0^l xJ_\nu^2(\sqrt{\lambda_n}x)dx$$

С учетом вида λ_n, а также рекуррентных формул по значку для функции Бесселя, окончательно получим

$$\frac{l^2(J_{\nu+1}(r_n^\nu))^2}{2} = \int_0^l xJ_\nu^2(\sqrt{\lambda_n}x)dx$$

2 Разделение переменных для уравнения Гельмгольца в полярных координатах

В качестве приложения построенной краевой задачи мы рассмотрим деление переменных в полярных координатах для уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

Будем искать u в виде

$$u(r, \phi) = A(r)B(\phi)$$

$$B(\phi)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}A(r) + A(r)\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}B(\phi) + k^2A(r)B(\phi) = 0$$

Делим переменные

$$\frac{r}{A(r)}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}A(r) + k^2r^2 = -\frac{1}{B(\phi)}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}B(\phi) = \mu$$

Посмотрим на уравнение по ϕ

$$\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}B(\phi) = \mu B(\phi)$$

Если мы хотим гладкое по углу решение, то мы должны взять $\mu = m^2$, а решение будет иметь вид

$$B(\phi) = e^{\pm im\phi}$$

Следовательно уравнение на $A(r)$ будет иметь вид

$$A'' + \frac{1}{r}A' + (k^2 - \frac{m^2}{r^2})A = 0$$

При $k^2 = \lambda$ и $m = \nu$ это уравнение совпадает с нашим спектральным уравнением. Таким образом,

$$A(r) = Z_m(kr)$$

где Z_m - решение уравнения Бесселя со значком m.

Другой очень близкий по смыслу вопрос - изучение спектра оператора Лапласа в круге. Рассмотрим краевую задачу в круге радиуса R на собственные функции и собственные значения следующего вида

$$-\Delta\psi = \lambda\psi$$

$$\psi|_{r=R} = 0$$

Видно, что спектральное уравнение полностью соответствует уравнению Гельмгольца для $k^2 = \lambda$. Таким образом, наши предыдущие построения работают для данной спектральной задачи. Дополнительно мы должны потребовать гладкость в центре круга (за счет этого наше произвольное решение уравнения Бесселя Z_m становится функцией Бесселя J_m) и равенство нулю на границе круга

$$J_m(\sqrt{\lambda}R) = 0$$

т.е. мы получаем условие на спектр

$$\lambda_n = (\frac{r_n^{|m|}}{R})^2$$

Таким образом, мы получили следующий набор собственных функций и собственных чисел

$$e^{im\phi}J_{|m|}(\frac{r_n^{|m|}}{R}r), \quad \lambda_n = (\frac{r_n^{|m|}}{R})^2, \quad m \in \mathbf{Z}, n = 1, 2, ...$$

ВОПРОС: показать, что это весь спектр. Других собственных чисел и собственных функций нет.