Лекция 11

В конце прошлой лекции мы ввели функции Ханкеля. Естественно возникает вопрос - зачем такие сложные константы фиксируют поведение этих функций на бесконечности? Дело в том, что классики хотели сделать теорию уравнения Бесселя похожей на стандартную формулу из комплексного анализа

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

А для решений уравнения Бесселя, при выбранной нормировке решений верна следующая формула

$$J_\nu = \frac{H_\nu^{(1)} + H_\nu^{(2)}}{2}$$

Здесь роль экспонент играют функции Ханкеля, а функция Бесселя играет роль косинуса. Более того, асимптотики при больших z и имеют вид косинуса и двух экспонент.

1 Связь функции Бесселя и функций Ханкеля

Для того, чтобы доказать формулу связи для функции Бесселя и функций Ханкеля нам необходимо интегральное представление для функции Бесселя. И мы возвращаемся к вопросу: как выбрать контур γ в интегральном представлении

$$z^\nu \int_\gamma e^{zt}(t^2+1)^{\frac{2\nu-1}{2}}dt$$

чтобы получить функцию Бесселя?

Прежде всего вспомним предыдущую лекцию. После замены

$$w(z) = z^\nu v(z)$$

мы получили уравнение с правильной особой точкой в нуле и набором показателей: $0, \quad -2\nu$. Нас интересует решение с показателем 0. Именно оно с точностью до константы соответствует функции Бесселя. Таким образом нам нужно выбрать контур в интеграле

$$\int_\gamma e^{zt}(t^2+1)^{\frac{2\nu-1}{2}}dt$$

так, чтобы получить голоморфное в окрестности точки $z = 0$ решение. Мы похожий вопрос уже рассматривали и знаем, что для этого контур должен быть ограниченным. Двойной восьмерки в данном случае не нужно, достаточно обычной восьмерки γ_8 (обход вокруг точки $t = i$ в положительном направлении + обход вокруг точки $t = -i$ в отрицательном направлении).

Веточки многозначных функций зафиксируем следующим образом: в начальный момент логарифмы $\ln(t \pm i)$ на продолжении разрезов в положительную сторону сторону вещественны. Таким образом,

$$J_\nu(z) = b_0 z^\nu \int_{\gamma_8} e^{zt}(t^2+1)^{\frac{2\nu-1}{2}} dt,$$

где b_0 подходящая константа. Для того, чтобы найти b_0 посмотрим на асимптотику при $z \to 0$. Из ряда для функции Бесселя имеем

$$J_\nu(z) \sim \frac{z^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}, \quad z \to 0$$

Следовательно,

$$b_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \left(\int_{\gamma_8} (t^2+1)^{\frac{2\nu-1}{2}} dt \right)^{-1}$$

Вычислим

$$\int_{\gamma_8} (t^2+1)^{\frac{2\nu-1}{2}} dt = I_0$$

Будем считать, что $0 < \mathrm{Re}\nu < 1$. Для остальных значений ν ответ получается аналитическим продолжением по ν (по значку ν мы имеем дело с целой функцией). Прежде всего можно вместо восьмерки оставить только верхнюю часть(с коэффициентом 2): контур $\hat{\gamma}$ из нуля вокруг i в положительном направлении

$$I_0 = 2\int_{\hat{\gamma}} (t^2+1)^{\frac{2\nu-1}{2}} dt$$

С учетом того, что $0 < \mathrm{Re}\nu < 1$, можно стянуть контур к разрезу и записать интеграл в виде

$$I_0 = 2(1 - e^{2\pi i \frac{2\nu-1}{2}}) \int_0^i (t^2+1)^{\frac{2\nu-1}{2}} dt$$

Сделаем замену $t = i\tau$

$$I_0 = 2i(1 - e^{2\pi i \frac{2\nu-1}{2}}) \int_0^1 (1-\tau^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} d\tau$$

и еще одну замену $\tau^2 = s$

$$I_0 = i(1 - e^{2\pi i \frac{2\nu-1}{2}}) \int_0^1 (1-s)^{\frac{2\nu-1}{2}} s^{-1/2} ds = i(1 - e^{\pi i \frac{2\nu-1}{2}}) B\left(\frac{2\nu+1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Или

$$I_0 = i(1 - e^{2\pi i \frac{2\nu-1}{2}}) \frac{\Gamma(\frac{2\nu+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+1)}$$

Таким образом,

$$b_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\frac{2\nu+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{1}{i(1-e^{2\pi i \frac{2\nu-1}{2}})} = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\frac{2\nu+1}{2})\sqrt{\pi} i(1-e^{2\pi i \frac{2\nu-1}{2}})}$$

Рассмотрим интегральные представления, полученные на прошлой лекции

$$w_{1,2}(z) = z^\nu \int_{\gamma_{1,2}} e^{zt}(t^2+1)^{\frac{2\nu-1}{2}} dt$$

С учетом их асимптотик при $z \to \infty$

$$w_1(z) \sim z^{-\frac{1}{2}} e^{iz} 2^{\frac{2\nu-1}{2}} e^{i\frac{\pi}{2}\frac{2\nu-1}{2}} \frac{2\pi i}{\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)}$$

$$w_2(z) \sim z^{-\frac{1}{2}} e^{iz} 2^{\frac{2\nu-1}{2}} e^{-i\frac{\pi}{2}\frac{2\nu-1}{2}} \frac{2\pi i}{\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)}$$

понятно, что они пропорциональны функциям Ханкеля

$$H_\nu^{(1)} = b_1 w_1(z),$$

$$H_\nu^{(2)} = b_2 w_1(z).$$

Коэффициенты b_1 и b_2 можно вычислить сравнивая асимптотики функций Ханкеля

$$H_\nu^{(1)} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z-\frac{\pi}{4}(2\nu+1))}$$

$$H_\nu^{(2)} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i(z-\frac{\pi}{4}(2\nu+1))}$$

и асимптотики решений $w_{1,2}$

$$b_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4}(2\nu+1)} 2^{-\frac{2\nu-1}{2}} e^{-i\frac{\pi}{2}\frac{2\nu-1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)}{2\pi i}$$

$$b_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}(2\nu+1)} 2^{-\frac{2\nu-1}{2}} e^{i\frac{\pi}{2}\frac{2\nu-1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)}{2\pi i}$$

Теперь осталось договорится о том как связаны между собой решения $w_{1,2}$ и интеграл по восьмерке

$$z^\nu \int_{\gamma_8} e^{zt}(t^2+1)^{\frac{2\nu-1}{2}} dt$$

Деформируя контур восьмерки как показано на рисунке (и учитывая изменение ветви при обходе по контуру), мы видим, что

$$z^\nu \int_{\gamma_8} e^{zt}(t^2+1)^{\frac{2\nu-1}{2}} dt = w_1(z) - \exp\left(2\pi i \frac{2\nu-1}{2}\right) w_2(z)$$

Таким образом

$$J_\nu(z) = b_0 z^\nu \int_{\gamma_8} e^{zt}(t^2+1)^{\frac{2\nu-1}{2}}dt = b_0(w_1(z) + e^{2\pi i\nu}w_2(z)) =$$

$$= \frac{b_0}{b_1}w_1(z) + e^{2\pi i\nu}\frac{b_0}{b_2}w_2(z)$$

Вычислим

$$\frac{b_0}{b_1} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{2^{\frac{2\nu-1}{2}}e^{i\frac{\pi}{2}\frac{2\nu-1}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}(2\nu+1)}}{2^\nu\Gamma(\frac{2\nu+1}{2})\sqrt{\pi}i(1-e^{2\pi i\frac{2\nu-1}{2}})}\frac{2\pi i}{\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)} =$$

Но

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

Следовательно,

$$\frac{b_0}{b_1} = \frac{\pi\sin(\pi(\nu+\frac{1}{2}))e^{i\pi\nu}}{(1+e^{2\pi i})\pi} = \frac{1}{2}$$

Аналогично,

$$e^{2\pi i\nu}\frac{b_0}{b_2} = \frac{1}{2}$$

Таким образом, мы доказали, что

$$J_\nu = \frac{H_\nu^{(1)} + H_\nu^{(2)}}{2}$$

В частности, отсюда следует асимптотика функции Бесселя при $z \to +\infty$

$$J_\nu \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos(z - \frac{\pi}{4}(2\nu+1))$$

ВОПРОС: в каком секторе действует эта асимптотика и почему?

Помимо функций Ханкеля и Бесселя вводится еще одно решение - функция Неймана

$$N_\nu = \frac{H_\nu^{(1)} - H_\nu^{(2)}}{2i}$$

Логика, снова напоминает элементарный комплексный анализ: ввели косинус, две экспоненты, не хватает синуса...

2 Функция Неймана

При нецелых ν набор $\{J_\nu, J_{-\nu}\}$ является базисом решений уравнения Бесселя. В частности, по этому базису можно разложить функцию Неймана

$$N_\nu = \frac{\cos(\pi\nu)J_\nu - J_{-\nu}}{\sin(\pi\nu)}$$

ВОПРОС: доказать это разложение. Посмотрим, как эта формула трансформируется для целых $\nu = n$. Видно, что в числителе и в знаменателе возникают нули. Давайте регуляризуем это отношение по правилу Лопиталя

$$N_n = \frac{(-1)^n \frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}|_{\nu=n} - \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}|_{\nu=n}}{\pi(-1)^n}$$

Функция Бесселя определяется своим рядом

$$J_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu}$$

Видно, что

$$2^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

голоморфная по z и ν функция. Следовательно

$$\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}|_{\nu=n} = \ln z J_n + z^n \phi_1(z,\nu)$$

где $\phi_1(z,\nu)$ голоморфная по z и ν функция. Аналогично,

$$\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}|_{\nu=n} = -\ln z J_{-n} + z^{-n} \phi_2(z,\nu)$$

где $\phi_2(z,\nu)$ голоморфная по z и ν функция. Таким образом,

$$N_n = \frac{2}{\pi} \ln z J_n + z^{-n} \phi_3(z,\nu)$$

где $\phi_3(z,\nu)$ голоморфная по z и ν функция. В частности,

$$N_0 = \frac{2}{\pi} \ln z J_0 + \phi_3(z,\nu)$$