Методы математической физики I

6 семестр

Лекции Суханова В. В.

2020 г.

Лекция 1

В прошлый раз мы остановились на теореме существования и единственности для нелинейной системы обыкновенных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{y}}{dz} = \boldsymbol{F}(z, \boldsymbol{y}), \\ \boldsymbol{y}\Big|_{z=z_0} = \boldsymbol{y}_0. \end{cases}$$

Для неё можно доказать существование и разрешимость только в некоторой окрестности точки z_0.

Однако основной интерес для нас будет представлять случай линейного уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{y}}{dz} = F(z)\, \boldsymbol{y}, \\ \boldsymbol{y}\Big|_{z=z_0} = \boldsymbol{y}_0. \end{cases} \tag{1}$$

Именно такие уравнения возникают для специальных функций, изучением которых мы и хотим заниматься.

Пусть $F(z)$ — матрица размера $n \times n$ с голоморфными коэффициентами в области $\mathcal{D}$: $F(z) \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$.

Здесь вопрос разрешимости можно ставить глобально во всей области $\mathcal{D}$. Однако ответ (как это было в комплексном анализе) зависит от односвязности области $\mathcal{D}$.

Для односвязных областей решение задачи (1) существует и единственно. Для неодносвязных областей может быть по-разному.

Перепишем дифференциальное уравнение (1) в интегральное:

$$\boldsymbol{y}(z) = \boldsymbol{y}_0 + \int\limits_{z_0}^{z} F(\widetilde{z})\, \boldsymbol{y}(\widetilde{z})\, d\widetilde{z}. \tag{2}$$

Для этого уравнения напишем итерации:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_1 &= \int\limits_{z_0}^{z} F(\widetilde{z})\, \boldsymbol{y}_0\, d\widetilde{z}, \\ \boldsymbol{y}_2 &= \int\limits_{z_0}^{z} F(\widetilde{z})\, \boldsymbol{y}_1\, d\widetilde{z}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{y}_n &= \int\limits_{z_0}^{z} F(\widetilde{z})\, \boldsymbol{y}_{n-1}\, d\widetilde{z} \end{aligned}$$

Сумма этих итераций

$$\sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{y}_n(z) \tag{3}$$

и будет решением нашего уравнения (2).

Как обычно, необходимо проверить сходимость нашего ряда. Это получается из оценок для итераций.

Пусть $\|F\| = M$. Тогда для итераций возникают следующие оценки:

$$\|\boldsymbol{y}_1\| \leqslant |z - z_0|\, M\, \|\boldsymbol{y}_0\|$$

(здесь мы используем выпуклость области),

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{y}_2\| &\leqslant \frac{|z-z_0|^2}{2!} M^2 \|\boldsymbol{y}_0\|, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \|\boldsymbol{y}_n\| &\leqslant \frac{|z-z_0|^n}{n!} M^n \|\boldsymbol{y}_0\|. \end{aligned}$$

Здесь факториал, как обычно, возникает из-за интегрирования степени. Таким образом,

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{y}_n(z) \right\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z-z_0|^n}{n!} M^n \|\boldsymbol{y}_0\| < \mathrm{const}.$$

Значит, доказали сходимость ряда (3). Эта сходимость будет равномерной в урезании $\mathcal{D}_\varepsilon$ области $\mathcal{D}$.

Следовательно, при подстановке ряда (3) в интегральное уравнение (2) можно поменять знаки интеграла и суммирования местами. Это и доказывает, что наш ряд является решением уравнения (2).

Мы доказали всё для выпуклой области. Далее для любой односвязной области можно доказать это утверждение станартным приёмом из комплексного анализа. В любом круге наше утверждение работает. Берём ломаную, соединяющую точки z_0 и z_1, и покрываем её кругами (так же, как это делали при аналитическом продолжении). Тогда видно, что мы можем доказать существование решения для не выпуклой области.

1.1 Поведение решений в окрестности изолированной особой точки коффициентов матрицы монодромии

Рассмотрим ситуации, когда $F(z)$ имеет изолированную особую точку $z = C$. Построим решения уравнения

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dz} = F(z)\,\boldsymbol{y} \tag{4}$$

в окрестности точки z_0.

Наше уравнение имеет n линейно независимых решений в окрестности этой точки. Эти решения образуют базис

$$\boldsymbol{w}_1(z),\ \boldsymbol{w}_2(z),\ \ldots,\ \boldsymbol{w}_n(z).$$

Давайте посмотрим на аналитическое продолжение этого базиса по кривой вокруг точки $z = C$. Когда мы вернёмся в точку z_0, нащ бвзис решений останется базисом решений, но, вохможно, несколько другим.

Постоянная матрица M (не зависящая от z), выражающая новые векторы базиса

$$\widetilde{\boldsymbol{w}}_1(z),\ \widetilde{\boldsymbol{w}}_2(z),\ \ldots,\ \widetilde{\boldsymbol{w}}_n(z),$$

полученные после аналитического продолжения, через старые, и называется *матрицей монодромии.*

Вопрос, который мы хотим изучить, слудуюший: каковы могут быть аналитические особенности функций $\boldsymbol{w}_j(z)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, в окрестности точки $z = C$?

Ответ зависит от алгебраических свойств матрицы монодромии M. В первую очередь — от возможности привести её к диагональному виду преобразованием подобия.

Пусть матрица M диагонализуема, а $\left\{\boldsymbol{w}_j(z)\right\}_{j=1}^{n}$ — это тот базис, в котором матрица M диагональна. Тогда $\widetilde{\boldsymbol{w}}_j(z) = \lambda_j \boldsymbol{w}_j(z)$ для всех $j \in \{1, \ldots, n\}$, причём $\widetilde{\boldsymbol{w}}_j(z)$ — результат аналитического продолжения функции $\boldsymbol{w}_j(z)$ вокруг C в положительном направлении.

Видно, что похоже на действие степенной функции при аналитическом продлжении вокруг точки особенности.

Поэтому возьмём
$$\boldsymbol{w}_j(z) := (z - C)^{\rho}\, \boldsymbol{\omega}_j(z)$$
(это не ограничивает вид $\boldsymbol{w}_j(z)$, поскольку $\boldsymbol{\omega}_j(z)$ пока произвольно).

Тогда, с одной стороны,
$$\widetilde{\boldsymbol{w}}_j(z) = (z - C)^{\rho}\, e^{2\pi i \rho}\, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_j(z),$$
а с другой стороны,
$$\widetilde{\boldsymbol{w}}_j(z) = \lambda_j\, (z - C)^{\rho}\, \boldsymbol{\omega}_j(z).$$
Если выбрать $\lambda_j := e^{2\pi i \rho_j}$ (это всегда вохможно, так как $\lambda_j \neq 0$ — матрица монодромии невырождена), то видно, что $\widetilde{\boldsymbol{\omega}_j}(z) = \boldsymbol{\omega}_j(z)$.

Таким образом, $\boldsymbol{\omega}_j(z)$ имеет в точке $z = C$ изолированную особенность, то есть устроили либо особую точку, либо полюс, либо существенно особую точку. В любом случае $\boldsymbol{\omega}_j(z)$ раскладывается в ряд Лорана:
$$\boldsymbol{\omega}_j(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \boldsymbol{c}_k (z - C)^k.$$

Можно посмореть на случай, когда матрица M не является диагонализуемой. Для диагонализуемой матрицы геометрическая кратность собственного числа равна алгебраической кратности, то есть размерность подпространства собственных векторов, отвечающих собственному числу λ, равно кратности корня полинома $\det\,(M - \lambda I)$, где I — единичная матрица.

Возьмём случай, когда λ_0 — корень полинома $\det(M - \lambda I)$ кратности 2, а ему соответствует один собственный вектор $\boldsymbol{w}_1(z)$:

$$\widetilde{\boldsymbol{w}}_1(z) = \lambda_0\, \boldsymbol{w}_1(z),$$

и один присоединённый вектор

$$\widetilde{\boldsymbol{w}}_2(z) = \lambda_0\, \boldsymbol{w}_2(z) + \boldsymbol{w}_1(z).$$

Для $\boldsymbol{w}_1(z)$ характер особенности не меняется:

$$\boldsymbol{w}_1(z) = (z - C)^\rho \sum_{k\in\mathbb{Z}} \boldsymbol{c}_k (z - C)^k, \qquad e^{2\pi i\rho} = \lambda_0.$$

Вычислим особенность для решения $\boldsymbol{w}_2(z)$. Будем искать её в виде

$$\boldsymbol{w}_2(z) = \alpha \ln(z - C)\, \boldsymbol{w}_1(z) + (z - C)^{\rho_2}\, \boldsymbol{\omega}_2(z),$$

где $\alpha = \mathrm{const}$. Про функцию $\boldsymbol{\omega}_2(z)$ мы пока ничего не говорим, поэтому $\boldsymbol{w}_2(z)$ не ограничивает свою общность.

Тогда

$$\begin{gathered}\widetilde{\boldsymbol{w}}_2(z) = \alpha\,(\ln(z - C) + 2\pi i)\, \widetilde{\boldsymbol{w}}_1(z) + (z - C)^{\rho_2}\, e^{2\pi i\rho_2}\, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_2(z) = \\ = \alpha\,(\ln(z - C) + 2\pi i)\,(z - C)^{\rho_1}\, \boldsymbol{\omega}_1(z)\, e^{2\pi i\rho_1} + (z - C)^{\rho_2}\;\; \boldsymbol{\omega}_1(z)\, e^{2\pi i\rho_2}\, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_2(z).\end{gathered}$$

С другой стороны,

$$\begin{gathered}\widetilde{\boldsymbol{w}}_2(z) = \lambda_0\, \boldsymbol{w}_2(z) + \boldsymbol{w}_1(z) = \\ = \lambda_0\,(\alpha \ln(z - C)\,(z - C)^{\rho_1}\, \boldsymbol{\omega}_1(z) + (z - C)^{\rho_2}\, \boldsymbol{\omega}_2(z)) + (z - C)^{\rho_1}\, \boldsymbol{\omega}_1(z).\end{gathered}$$

Сравнивая эти два выражения, получим:

$$\begin{cases} e^{2\pi\rho_2} = \lambda_0, \\ 2\pi i\alpha e^{2\pi i\rho_1} = 1. \end{cases}$$

Если выбрать ρ_2 и α так, то получим, что $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_2(z) = \boldsymbol{\omega}_2(z)$, то есть функция $\boldsymbol{\omega}_2(z)$ не меняется при аналитическом продолжении вокруг C:

$$\boldsymbol{\omega}_2(z) = \sum_{k\geqslant 0} \boldsymbol{d}_k\, (z - C)^k.$$

Задача. Найти поведение в окрестности точки $z = C$ для решений в случае, когда матрица M имеет для собственного числа λ_0 один собственный вектор и два присоединённых.

В дальнейшем мы ещё раз ограничим список уравнений, которые мы будем рассматривать.

Мы будем изучать уравнения вида

$$w''(z) + p(z)\, w' + q(z)\, w = 0.$$

Легко видеть, что это уравнение погружается в рамки тех построений, которые мы уже сделали: возьмём вектор

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w(z) \\ w'(z) \end{pmatrix};$$

тогда

$$\frac{d\boldsymbol{w}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix} \boldsymbol{w}.$$