Следующие несколько параграфов мы посвятим изложению некоторых дополнительных сведений из теории матриц.

§ 5. Лемма о „переброске".

<u>Утв 1</u>

] a – матрица $m \times n$ с компл. элементами.

Тогда $\forall\, \vec{x} \in \mathbb{C}^n,\ \vec{y} \in \mathbb{C}^m$

напомним: $\left((a^*)_{ik} = \overline{a_{ki}}\right)$

$$\langle a\vec{x}, \vec{y} \rangle_{\mathbb{C}^m} = \langle \vec{x}, a^*\vec{y} \rangle_{\mathbb{C}^n}$$

(NB: через $\langle , \rangle$ мы обозначаем стандартное скалярное произведение).

<u>Д-во</u> $a \in M(m \times n) \Rightarrow a^* \in M(n \times m);\ a\vec{x} \in \mathbb{C}^m;\ a^*\vec{y} \in \mathbb{C}^n.$

$$\langle a\vec{x}, \vec{y} \rangle_{\mathbb{C}^m} = \sum_{k=1}^{m} (a\vec{x})_k \overline{y_k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \right) \overline{y_k}$$

$$\langle \vec{x}, a^*\vec{y} \rangle_{\mathbb{C}^n} = \sum_{j=1}^{n} x_j (a^*\vec{y})_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{\left(\sum_{k=1}^{n} \underbrace{(a^*)_{jk}}_{\overline{a_{kj}}} y_k \right)}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{\left(\sum_{k=1}^{n} \overline{a_{kj}}\, y_k \right)} = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{k=1}^{n} a_{kj} \overline{y_k} \right).$$

Рассмотренные суммы отличаются друг от друга перестановкой слагаемых, что и доказывает лемму.

Утв 1.$^{\mathbb{R}}$

] a - матрица $m \times n$ с вещественными элементами.

Тогда $\forall\, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$

$$\langle a\vec{x}, \vec{y} \rangle_{\mathbb{R}^m} = \langle \vec{x}, a^T \vec{y} \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

Доказательство аналогично предыдущему — только, естественно, нигде нет комплексного сопряжения.

Для дальнейшего напомним некоторые свойства сопряжения матриц, которые мы рассматривали в ноябре.

$a \in M(m \times n)$, $b \in M(n \times p) \Rightarrow (ab)^* = b^* a^*$

$a \in M(m \times m)$, $\det a \neq 0$ $\quad (a^{-1})^* = (a^*)^{-1}$

(Действительно, $a^*(a^{-1})^* = (a^{-1} \cdot a)^* = I^* = I$.

§6. Унитарные и ортогональные матрицы.

<u>Опр</u>

Квадратная матрица U (с комплексными элементами) наз унитарной $\Longleftrightarrow$ $\det U \neq 0$ и $U^{-1} = U^*$ (то есть $U^*U = UU^* = I$. Отметим, что из равенства $U^*U = I$ (равно как и из $UU^* = I$) следует унитарность — для квадратных матриц наличие правой или левой обратной влечет за собой наличие и обратной с $\forall$ стороны).

Унитарная матрица с вещественными элементами наз. ортогональный (т.е. вещественная квадратная матрица V ортогональна $\Longleftrightarrow$ $V^{-1} = V^T \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow V^T V = I \Longleftrightarrow VV^T = I$.

Св-ва унитарных матриц.

1. Произведение унитарных матриц — унитарная матрица.

Действительно, если $U_1, U_2 \in M(n \times n)$ $U_{1,2}^{-1} = U_{1,2}^*$, то

$(U_1 U_2)^* U_1 U_2 = U_2^* U_1^* U_1 U_2$. Но $U_1^* U_1 = I \Rightarrow$

$\Rightarrow (U_1 U_2)^* U_1 U_2 = U_2^* I U_2 = U_2^* U_2 = I$.

2. Единичная матрица унитарна.

3. U унитарна $\Rightarrow$ U^{-1} унитарна:

U унитарна $\Rightarrow$ $U^* U = I$. Отметим, что для любых неособых квадратных матриц a, b $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$: $b^{-1}a^{-1}ab = b^{-1}(a^{-1}a)b = b^{-1}Ib = I$.

Тем самым $U^*U = I \Rightarrow (U^*U)^{-1} = I \Leftrightarrow U^{-1}(U^*)^{-1} = I$

$\Leftrightarrow U^{-1}(U^{-1})^* = I$ (мы уже отметили, что $(U^{-1})^* = (U^*)^{-1}$)

Итак /, U^{-1} унитарна.

Св-ва 1 ÷ 3 означают, что множество унитарных матриц $n \times n$ образует группу отн. умножения матриц. Эту группу мы будем обозначать $U(n)$. Св-ва 1 ÷ 3 для вещественных матриц (ортогональных) также, естественно, верны. Группу ортогональных матриц $n \times n$ мы будем обозначать $O(n)$.

4. $U \in U(n) \Rightarrow |\det U| = 1$

Ясно, что $\det U^* = \det \overline{U}^T = \det \overline{U} = \overline{\det U}$

$$\left(\sum_{\bar{i} \in M_n} \varepsilon(\bar{i}) \overline{u}_{1i_1} \dots \overline{u}_{ni_n} = \overline{\sum_{\bar{i} \in M_n} \varepsilon(\bar{i}) u_{1i_1} \dots u_{ni_n}} \right).$$

Тогда $U \in U(n) \Leftrightarrow U^*U = I \Rightarrow \det(U^*U) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow |\det U|^2 = 1.$

5. $\exists\ \mathfrak{f}=\{f_1 \dots f_n\}$, $\mathfrak{g}=\{g_1 \dots g_n\}$ – ортонормированные базисы в $\mathbb{C}^n$. Тогда МЗБ $\mathfrak{f}$ на $\mathfrak{g}$ унитарна.

Действительно, если b – МЗБ $\mathfrak{f}$ на $\mathfrak{g}$, то $\vec{g}_k=\sum\limits_{s=1}^{n} b_{sk}\vec{f}_s$.

$$\langle \vec{g}_k, \vec{g}_m\rangle_{\mathbb{C}^n}=\left\langle \sum_{s=1}^{n} b_{sk}\vec{f}_s, \sum_{p=1}^{n} b_{pm}\vec{f}_p\right\rangle_{\mathbb{C}^n}=$$

$$=\sum_{p,s=1}^{n} b_{sk}\overline{b}_{pm}\langle \vec{f}_s, \vec{f}_p\rangle_{\mathbb{C}^n} \underset{\langle f_s, f_p\rangle=\begin{cases}1 & s=p\\ 0 & s\neq p\end{cases}}{=} \sum_{p=1}^{n} b_{pk}\overline{b}_{pm}=$$

$$=\sum_{p=1}^{n}(b^*)_{mp}\,b_{pk}=(b^*b)_{mk}.$$ Тем самым

$$\langle \vec{g}_s, \vec{g}_m\rangle_{\mathbb{C}^n}=\begin{cases}1 & s=m\\ 0 & s\neq m\end{cases} \iff b^*b=I.$$

Ортонормированность базиса $\mathfrak{g}$, тем самым, равносильна унитарности матрицы b. То есть мы не только доказали св-во 5, но и увидели, что если базис $\mathfrak{f}$ ортонормирован, а МЗБ $\mathfrak{f}$ на $\mathfrak{g}$ унитарна, то и базис $\mathfrak{g}$ ортонормирован.

6. $\exists\ U\in M(n\times n)$. U унитарна $\iff$ совокупность ее столбцов $\{U_{\bullet k}\}_{k=1\dots n}$ образует ортонормированный базис в пр-ве $\mathbb{C}^n$ со стандартным скалярным произведением (а совокупность строк образует ОНБ пр-ва $(\mathbb{C}^n)^T$.)

<u>Д-во</u>: U - унитарна $\Leftrightarrow U^*U = I \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (U^*U)_{km} = \begin{cases} 1 & k=m \\ 0 & k\neq m \end{cases} \Leftrightarrow \sum_{s=1}^{n} (U^*)_{ks} U_{sm} = \begin{cases} 1 & k=m \\ 0 & k\neq m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{s=1}^{n} U_{sm} \overline{U}_{sk} = \begin{cases} 1 & k=m \\ 0 & k\neq m \end{cases} = \langle U_{\bullet m}, U_{\bullet k} \rangle_{\mathbb{C}^n}$$

Аналогично для строк: U унитарна $\Leftrightarrow UU^* = I$.

Заверить это доказательство прошу в качестве упражнения.

7. Все собственные значения унитарных матриц по модулю равны 1. Собственные вектора унитарных матриц, отвечающие различным собственным значениям — ортогональны.

<u>Д-во</u>: пусть λ - собств. значение унитарной матрицы U, $\vec{x}$ - ненулевой собственный вектор.

Тогда $U\vec{x} = \lambda\vec{x}$, $\langle U\vec{x}, \vec{x}\rangle_{\mathbb{C}^n} = \lambda \|\vec{x}\|^2_{\mathbb{C}^n}$.

Но: $\vec{x} = \lambda U^{-1}\vec{x}$ $(\det U \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 0)$

и $U^{-1}\vec{x} = U^*\vec{x} = \frac{1}{\lambda}\vec{x}$. Поэтому

$$\langle U\vec{x}, \vec{x}\rangle_{\mathbb{C}^n} \underset{\text{Л.о переброске}}{=} \langle \vec{x}, U^*\vec{x}\rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle \vec{x}, \tfrac{1}{\lambda}\vec{x}\rangle =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\|x\|^2.$$

Тем самым (т.к. $\|x\| \neq 0$) $\lambda = \frac{1}{\bar{\lambda}} \Leftrightarrow |\lambda|^2 = 1$.

Далее, $\exists\ \lambda \neq \mu$, $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\vec{y} \neq \vec{0}$, $U\vec{x} = \lambda \vec{x}$
$U\vec{y} = \mu \vec{y}$ ($\Rightarrow$
$\Rightarrow U^* U \vec{y} = \vec{y} = \mu U^* \vec{y}$)

Тогда

$$\langle U\vec{x}, \vec{y} \rangle_{\mathbb{C}^n} = \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_{\mathbb{C}^n}$$

$$\|$$

$$\langle \vec{x}, U^* \vec{y} \rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle \vec{x}, \frac{1}{\mu} \vec{y} \rangle = \frac{1}{\bar{\mu}} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

Но: $|\mu| = 1 \Leftrightarrow \bar{\mu}\mu = 1 \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{\bar{\mu}}$! Тем самым

$(\lambda - \mu)\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$. Т.к. $\lambda \neq \mu$, то $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_{\mathbb{C}^n} = 0$,

что и требовалось доказать.

8. U унитарна $\Rightarrow \|Ux\|_{\mathbb{C}^n} = \|x\|_{\mathbb{C}^n}$,

$$\langle Ux, Uy \rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle x, y \rangle_{\mathbb{C}^n}$$

Доказать прошу самостоятельно. Отметим даже большее: $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle \ \forall \vec{x}, \vec{y} \Rightarrow$

U унитарна.

В завершение ~~заметим~~ отметим, что все унитарные матрицы диагонализуемы. Это будет доказано позднее.

Примеры

1. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ – ортогональна. Очевидно, что столбцы ортогональны и нормированы.

2. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ – ортогональна

3. $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ – унитарна:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = I.$$

§ 7. Эрмитовы матрицы.

<u>Опр</u>

Квадратная матрица a наз. эрмитовой $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $a^* = a$

$(\Longleftrightarrow \ a_{ik} = \overline{a}_{ki})$.

Вещественная матрица эрмитова $\Longleftrightarrow$ она симметрична.

<u>Утв</u>

Спектр эрмитовых матриц (в т.ч. вещественных симметричных) вещественен. Собственные вектора эрмитовых матриц, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

Д-во

$\exists \ a^* = a \in M(n \times n)$; $\lambda \in \sigma(a)$.

$a\vec{x} = \lambda\vec{x}$, $\vec{x} \neq \vec{0}$. Тогда

$$\langle a\vec{x}, \vec{x} \rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle \lambda\vec{x}, \vec{x} \rangle_{\mathbb{C}^n} = \lambda \langle x, x \rangle_{\mathbb{C}^n}$$

|| л.о. переброске

$$\langle \vec{x}, a^*\vec{x} \rangle_{\mathbb{C}^n} \overset{a=a^*}{=} \langle \vec{x}, a\vec{x} \rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle \vec{x}, \lambda\vec{x} \rangle = \overline{\lambda} \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_{\mathbb{C}^n}$$

Тем самым $\lambda = \overline{\lambda} \Longleftrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$.

Далее, $\exists \ \mu \in \sigma(a)$, $\mu \neq \lambda$, $a\vec{y} = \mu\vec{y}$, $\vec{y} \neq \vec{0}$. Тогда

$$\langle ax, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

|| ЛОП

$$\langle x, a^* y \rangle = \overline{\mu} \langle x, y \rangle \overset{\mu = \overline{\mu}}{=} \mu \langle x, y \rangle. \quad \lambda \neq \mu \Rightarrow \langle x, y \rangle = 0.$$

Отметим теперь, что свойство эрмитовости сохраняется при одном важном преобразовании матриц.

Опр.

] $a, \tilde{a} \in M(n \times n)$. a и $\tilde{a}$ наз. унитарно эквивалентными матрицами $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists$ унитарная матрица v : $\tilde{a} = v^{-1} a v$.

Т.о. унитарная эквивалентность – это подобие матриц в том случае, когда преобразующая матрица v - унитарна. Например, при замене одного ортонормированного базиса на другой (также ортонормированный), изображающие матрицы операторов в ~~разных~~ этих двух базисах – унитарно эквивалентны, т.к. ~~при~~ МЗБ – унитарна.

Утв

Матрица, унитарно эквивалентная эрмитовой – эрмитова.

Д-во.

] a - эрмитова, v - унитарна, $\tilde{a} = \underset{\underset{v^*}{\parallel}}{v^{-1}} a v$.

Тогда $(\tilde{a})^* = \underset{\underset{v^{-1}}{\parallel}}{v^*} \underset{\underset{a}{\parallel}}{a^*} \underset{\underset{v}{\parallel}}{(v^*)^*} = v^{-1} a v = \tilde{a}$, ч.и т.д.

Отметим, в завершение параграфа, что всякая эрмитова матрица диагонализуема. Более того, всякая эрмитова матрица не просто подобна, а унитарно эквивалентна диагональной (т.е. для всякой эрмитовой матрицы мы можем найти ортонормированный базис собственных векторов). Это утверждение будет доказано позднее (вместе с аналогичным утверждением об унитарных матрицах). Однако, проиллюстрируем сказанное следующими примерами.

<u>Пример 1</u>

$$a = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$p_a(\lambda) = (3-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 9\lambda + 14$. $\sigma(a) = \{2, 7\}$

$\lambda_1 = 2$

$a\vec{x} = 2\vec{x}$

$(a - 2I)\vec{x} = 0$

$\vec{x}$ удовл. ОЛС $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \vec{x} \parallel \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 7$

$a\vec{x} = 7\vec{x}$

$(a - 7I)\vec{x} = 0$

$\vec{x}$ удовл ОЛС

$\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Введем ОНБ собственных векторов:

$$\vec{f_1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{f_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

МЗБ (станд. на $\mathbb{E}$) $b = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ - унитарна

(точнее, ортогональна)

$$b^{-1}ab \underset{b^{-1}=b^*}{=} b^*ab = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 14 \end{pmatrix}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

<u>Пример 2</u>

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p_a(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda^2-1) - (-\lambda-1) + (1+\lambda)$$
$$= -(\lambda+1)\left[\lambda(\lambda-1)-2\right] = -(\lambda+1)^2(\lambda-2)$$

$\lambda = 2$

$a\vec{x} = 2\vec{x}$

$\vec{x}$ удовл ОЛС $(a-2I|0)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow x \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = -1.$

$aX = -X$

$\vec{X}$ удовл ОЛС $(a+I|0)$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$\Leftrightarrow (1\ 1\ 1|0)$. Итак, геом. кратность равна 2.

Утверждение общего характера гарантируют, что собственные вектора, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны. А вот в кратном собственном значении за ортогональность „придется побороться".

] $\vec{f_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ – собственный вектор, $a\vec{f_1} = -\vec{f_1}$.

Второй собственный вектор, ортогональный $\vec{f_1}$, должен удовлетворять ОЛС $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

(Действ., $\vec{X} \perp \vec{f_1} \Leftrightarrow X$ удовл $(1-10|0)$.

] $\vec{f_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. $\vec{f_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: $a\vec{f_3} = 2f_3$.

Нормируем: $\vec{g_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{g_2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{g_3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ –

ОНБ, составленный из собств. векторов матрицы a.

$$b = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \underset{\substack{\| \\ b^T}}{b^{-1}} ab = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$