

§ 3 Ортонормированные базисы

Теорема 1

В любом конечномерном евклидовом пространстве существуют ортонормированные базисы (т.е. базисы, являющиеся ортонормированными системами).

Д-во

□ $f = \{f_1, \dots, f_n\}$ — базис евклидова пр-ва E . Применим к f процедуру канонической ортогонализации. Полученная система $g = \{g_1, \dots, g_n\}$ ортонормирована (и, тем самым, линейно независима) и $\mathcal{L}\{g_1, \dots, g_n\} = \mathcal{L}\{f_1, \dots, f_n\} = E$. □

Примеры

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} — \text{ОНБ } \mathbb{R}^3 \text{ (и } \mathbb{C}^3\text{).}$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} — \text{ОНБ } \mathbb{R}^4 \text{ (и } \mathbb{C}^4\text{).}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} — \text{ОНБ } \mathbb{C}^2 : \left(\begin{aligned} & \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}^2} = \\ & = 1(-i) + i(1) = 0 \end{aligned} \right).$$

Вычисление координат вектора в ортонормированной базисе
⁽²⁾
 проводится очень просто. Именно

Утб] E -кокоммерное евклидово пр-во, $f = \{f_1, \dots, f_n\}$ - ОН базис E .

$$\text{Тогда } [x]_f = \begin{pmatrix} (x, f_1)_E \\ (x, f_2)_E \\ \vdots \\ (x, f_n)_E \end{pmatrix}$$

(или, что то же самое, $\vec{x} = \sum_{k=1}^n (\vec{x}, \vec{f}_k)_E \vec{f}_k \quad \forall \vec{x} \in E$.)

Доказательство

$$]\vec{x} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \vec{f}_k. \text{ Тогда } (\vec{x}, \vec{f}_s)_E = \sum_{k=1}^n \alpha_k (\vec{f}_k, \vec{f}_s)_E.$$

$$\text{Но } (\vec{f}_k, \vec{f}_s)_E = \begin{cases} 1 & k=s \\ 0 & k \neq s \end{cases} \text{ откуда } (\vec{x}, \vec{f}_s)_E = \alpha_s \quad \square.$$

Утб (о выразении скалярного произведения через координаты вектора в ОН базисе).

] E -кокоммерное евклидово пространство, $f = \{f_1, \dots, f_n\}$ - ОН базис E .

] $\vec{x}, \vec{y} \in E$. Тогда $(\vec{x}, \vec{y})_E = \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k$, где
 $\alpha_k = (x, f_k)$; $\beta_k = (y, f_k)$ - координаты векторов \vec{x} и \vec{y}
 в базисе f . В частности, $\|\vec{x}\|_E^2 = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2$.

3

Доказательство

$\exists \vec{x} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \vec{f}_k, \vec{y} = \sum_{k=1}^n \beta_k \vec{f}_k.$ Тогда

$$(\vec{x}, \vec{y})_E = \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \vec{f}_k, \sum_{j=1}^n \beta_j \vec{f}_j \right)_E = \sum_{k,j=1}^n \alpha_k \bar{\beta}_j (\vec{f}_k, \vec{f}_j)_E =$$

$$= \sum_{k=1}^n \alpha_k \bar{\beta}_k \quad \begin{array}{l} \text{"в пред. сумме} \\ \text{"ближивают" только} \\ \text{"диагональные" слагающие} \end{array}$$

||
 0
 k
 j

Мы дали доказательство в случае комплексного пространства E . В вещественном случае, естественно, исследуют все знаки комплексного сопряжения.

В завершение параграфа еще ~~закончим~~ одно утверждение, похожее на предыдущее.

~~Пусть~~ u_1, \dots, u_n — ортогональная система. Тогда

$$\|u_1 + \dots + u_n\|^2 = \sum_{k=1}^n \|u_k\|^2, \quad (\text{по существу дела —})$$

теорема Пифагора.

Действительно

$$\left(\sum_{k=1}^n u_k, \sum_{j=1}^n u_j \right) = \sum_{k,j=1}^n (u_k, u_j) = \sum_{k=1}^n (u_k, u_k) +$$

$$+ \sum_{\substack{k,j=1 \\ k \neq j}}^n (u_k, u_j), \quad \text{что и требовалось доказать}$$

||
 0

(4)

24 Теорема о проекции

Оператора проектирования (проектора).

Теорема

$\exists E$ -конечномерное евклидово пространство, F -подпространство E . Тогда $\forall \vec{x} \in E \exists! \vec{f} \in F$ и $\vec{g} \perp F$ такие, что $\vec{x} = \vec{f} + \vec{g}$. (\vec{f} наз. проекцией \vec{x} на F).

Д-во

Если F тривиально ($F = \{\vec{0}\}$) то, очевидно, $\vec{f} = \vec{0}$ и $\vec{g} = \vec{x}$. Пусть F неневиаально. На основании теоремы 1 §3 в F существует ОН базис (т.к. F конечномерно и может быть рассмотрено как самостоятельное евклидово пространство). $\exists \{f_1, \dots, f_m\}$ -ОН базис F .

$$\nexists \vec{f} = \sum_{k=1}^m (\vec{x}, \vec{f}_k) \vec{f}_k, \quad \vec{g} = \vec{x} - \vec{f}.$$

$$\text{Ясно, что } \vec{f} \in F. \text{ Далее, } (\vec{g}, \vec{f}_s)_E = (\vec{x}, \vec{f}_s)_E - \sum_{k=1}^m (\vec{x}, \vec{f}_k)_E (\vec{f}_k, \vec{f}_s)_E \stackrel{\text{||}}{=} (\vec{x}, \vec{f}_s)_E - (\vec{x}, \vec{f}_s)_E = 0.$$

Таким образом $\vec{g} \perp \vec{f}_s \quad \forall s = 1 \dots m \Rightarrow g \perp \text{Лин}\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_s\} = F$:

$$(\vec{g}, \sum_k \beta_k \vec{f}_k)_E = \sum_k \bar{\beta}_k (\vec{g}, \vec{f}_k)_E = 0.$$

Умак, существование $\vec{f} \cup \vec{g}$ доказано. Докажем единственность. $\exists \vec{x} = \vec{f} + \vec{g} = \tilde{\vec{f}} + \tilde{\vec{g}}$. Тогда

$$\vec{f} - \tilde{\vec{f}} = \tilde{\vec{g}} - \vec{g} = \vec{u}. \quad \vec{f} - \tilde{\vec{f}} \in F.$$

$\tilde{\vec{g}} - \vec{g} \perp F$. Тем самым, \vec{u} ортогонален сам себе \vec{u} , поэтому, $\vec{u} = \vec{0}$:

$$(u, u) = (\vec{f} - \tilde{\vec{f}}, \tilde{\vec{g}} - \vec{g}) = \underset{0}{\overset{\parallel}{(f\tilde{g})}} + \underset{0}{\overset{\parallel}{(\tilde{f}g)}} - \underset{0}{\overset{\parallel}{(\tilde{f}\tilde{g})}} - \underset{0}{\overset{\parallel}{(fg)}} = 0.$$

Теорема полностью доказана. Добавим к этому, одно замечание: если $F = E$, то $\vec{f} = \vec{x}; \vec{g} = \vec{0}$.

Несколько замечаний об ортогональных подпространствах.

УТВ

$\exists F_1 \dots F_m$ - подпространства евклидова пространства E ;
 $F_k \perp F_s$ при $k \neq s$ (т.е. $\forall \vec{u} \in F_k, \forall \vec{v} \in F_s \quad u \perp v$).

Тогда $F_1 \dots F_m$ линейно независим.

З-бо

$\exists \vec{u}_k \in F_k, u_k \neq 0$. Тогда система $u_1 \dots u_n$ - ортогональная система ненулевых векторов u , тем самым, линейно независима. УТВ доказано.

В силу доказанного, линейная сумма $F_1 \dots F_m$

6

прямая. Но мы, здесь и далее, называем прямую сумму

ортогональных подпространств будем наывать их
ортогональной суммой: $\bigoplus_{k=1}^n F_k$. Т.е.

если использование символа „ \bigoplus “ (TeX \oplus)
указывает на ортогональность соответствующих подпространств.

Заметим, что в рамках указанного теоремы
о проекции может быть записана в одно

равенство: $E = F \bigoplus F^\perp$ (F - подпространство
конечномерного евклидова пространства E).

7

Нак, перейдем к операторам проектирования.

Как и ранее, E -комплексное евклидово, F -
подпр-во E . Рассмотрим отображение P_F ,
действующее по правилу $P_F \vec{X} = \overrightarrow{f}$, где \overrightarrow{f} -
проекция \vec{X} на F . Это отображение линейно.

Действительно

$$\text{J } \vec{X} = \underbrace{\overrightarrow{f}}_F + \underbrace{\overrightarrow{g}}_F, \quad \vec{y} = \underbrace{\overrightarrow{u}}_F + \underbrace{\overrightarrow{v}}_F.$$

$$\text{Тогда } d\vec{x} + \beta \vec{y} = \left(\underbrace{d\overrightarrow{f} + \beta \overrightarrow{u}}_F \right) + \left(\underbrace{d\overrightarrow{g} + \beta \overrightarrow{v}}_{\perp F} \right)$$

Значит, в силу единственности проекции, $P_F(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) =$

$$= \alpha P_F \vec{x} + \beta P_F \vec{y}, \text{ то и означает, что } P_F \in \Lambda(E).$$

~~Образ~~ Оператор P_F мы будем называть
оператором ортогонального проектирования на F
(или ортопроектором на F). Ясно, что в
случае $F = \{\vec{0}\}$ $P_F = \mathbb{O}$, а в случае $F = E$ $P_F = I$.

Ch-ба операторов проектирования.

1. $R(P_F) = F$
2. $\text{Ker } P_F = F^\perp$
3. $P_F^2 (= P_F P_F) = P_F$
4. $(P_F x, P_F y) = (P_F x, y) = (x, P_F y) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in E$
5. $P_F + P_{F^\perp} = I$
6. Если $F \perp G$, то $P_F + P_G = P_{F \oplus G}$

Задача

1. ИCHO, что $R(P_F) \subset F$. (всякая проекция $\in F$).
 Доказательство. $\vec{f} \in F$. $\vec{f} = \overset{\vec{f}}{\underset{F}{\parallel}} + \overset{\vec{0}}{\underset{F}{\perp}} \Rightarrow$ (единственность проекции) $P_F \vec{f} = \vec{f}$. Значит, $R(P_F) = F$.
 Одновременно доказано, что $P_F(P_F x) = P_F x$, т.е. (п.4).
2. $\vec{y} \in \text{Ker } P_F \iff P_F \vec{y} = \vec{0} \iff \vec{y} = \overset{\vec{0}}{\underset{P_F \vec{y}}{\parallel}} + \overset{\vec{0}}{\underset{F}{\perp}} \iff$
 $\iff y \perp F$.
3. $\vec{x} = \vec{f} + \vec{g} \quad (\vec{f} = P_F \vec{x}, \vec{g} \perp F), \vec{y} = \vec{u} + \vec{v} \quad (\vec{u} = P_F \vec{y}, \vec{v} \perp F)$



Tогда

$$\begin{array}{c} F \\ \oplus \\ f \perp v \end{array}$$

g

$$(P_F x, y) = (f, u+v) = (f, u) = (P_F x, P_F y)$$

$$(x, P_F y) = (f+g, u) \quad \overline{\parallel} \quad g \perp u$$

⑤ Это просто Теорема о проекции: $x = P_F x + P_{F^\perp} x$.

$$\begin{array}{c} \parallel \\ f \\ \parallel \\ g \end{array}$$

⑥ $\exists F \perp G$

$$\exists x = \underbrace{\vec{f}}_{\in F} + \underbrace{\vec{h}_F}_{\perp F} \quad \vec{f} = P_F \vec{x}$$

$$\exists \vec{x} = \underbrace{\vec{g}}_{\in G} + \underbrace{\vec{h}_G}_{\perp G} \quad \vec{g} = P_G \vec{x}$$

$$\nexists \vec{x} - (\vec{f} + \vec{g}) = \underbrace{\vec{h}_F - \vec{g}}_{\parallel \vec{h}_G - \vec{f}}$$

$$\vec{h}_F - \vec{g} \perp F, \quad \vec{h}_G - \vec{f} \perp G \quad (\text{т.к. } \begin{array}{l} h_F \text{ и } g \perp F \\ h_G \text{ и } f \perp G \end{array})$$

Т.о. $\vec{x} - (\vec{f} + \vec{g})$ ортогонален как F , так и G .

(10)

Лемма

\square F, G — ортогональные подпространства евклидова пр-ва E .

$$\text{Тогда } (F \oplus G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$$

Д-бо.

$$\vec{y} \perp F \oplus G \iff \vec{y} \perp \vec{f} + \vec{g} \quad \begin{array}{l} \nexists \vec{f} \in F \\ \nexists \vec{g} \in G \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{y} \perp F \wedge \vec{y} \perp G \iff y \in F^\perp \cap G^\perp$$

Обратно: $y \in F^\perp \cap G^\perp \Rightarrow y \perp f, y \perp g \quad \begin{array}{l} \nexists \vec{f} \in F \\ \nexists \vec{g} \in G \end{array}$

$$\Rightarrow \vec{y} \perp \vec{f} + \vec{g} \quad \begin{array}{l} \nexists f \in F \\ \nexists g \in G \end{array} \Rightarrow$$

$\Rightarrow y \in (F \oplus G)^\perp \square$. Итак, упомянутое:

$$x - (\underbrace{\vec{f} + \vec{g}}_{\in F \oplus G}) = \underbrace{\vec{w}}_{\in (F \oplus G)^\perp} \stackrel{h_F - g}{=} \stackrel{h_G - f}{=}$$

Поэтому $P_{F \oplus G} x = f + g$, то и доказывается пункт б.

Замечание

Из теоремы о проекции следует, что в случае, когда F -подпр-во E $(F^\perp)^\perp = F$.

Напоминание о задании стр. 3 лекции 23 марта.

Пример

Типовая задача (первая задача итогового экзамена).

$E = \mathbb{R}^4$ (скалярное произведение - стандартное)

$$F = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}. \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Найти проекции \vec{x} на F и на F^\perp .

Решение 1 (аналогично 4 задаче осеннего коллоквиума).

$$\vec{x} = \underbrace{\vec{f}}_{F} + \underbrace{\vec{g}}_{F^\perp} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \vec{g}$$

$$\text{Тогда } \vec{x} - \vec{g} \perp F \Leftrightarrow \vec{x} - \vec{f} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

12

Тем самым

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 44 = 15\alpha + 14\beta \\ 53 = 14\alpha + 25\beta \end{cases}. \text{ Отсюда } \alpha=2, \beta=1,$$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Тако, что } g \perp F.$$

Решение 2

Из теоремы о проекции (также, ее доказательства)

$$\text{следует, что } \vec{x} = P_F \vec{x} = \langle x, \vec{f}_1 \rangle \vec{f}_1 + \langle x, \vec{f}_2 \rangle \vec{f}_2$$

где $\vec{f}_{1,2}$ — ОН базис F . Найдем его, проведя
процедуру ортогонализации к заданной паре векторов.

$$\vec{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \|\vec{f}_1\| = 1.$$

$$\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{f}_1 \right\rangle \vec{f}_1 =$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{15} \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{14}{15} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 16 \\ -13 \\ 46 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Umax

$$\vec{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2685}} \begin{pmatrix} 16 \\ -13 \\ 46 \\ -12 \end{pmatrix}, \quad 16^2 + 13^2 + 46^2 + 12^2 = 2685 = 15 \cdot 179$$

Danee

$$\begin{aligned} \vec{F} &= (\vec{x} \vec{f}_1) \vec{f}_1 + (\vec{x} \vec{f}_2) \vec{f}_2 = \\ &= \frac{1}{15} \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2685} \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16 \\ -13 \\ 46 \\ -12 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 16 \\ -13 \\ 46 \\ -12 \end{pmatrix} \\ &= \frac{44}{15} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{179}{2685} \begin{pmatrix} 16 \\ -13 \\ 46 \\ -12 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 44 + 16 \\ 88 - 13 \\ 44 + 46 \\ 132 - 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\vec{g} = \vec{x} - \vec{F} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

14

Дополнительный вопрос в связи с
данной задачей - а как действует оператор P_F ?

Всякий ^{лине} оператор в R^4 есть оператор умножения
столбца на матрицу слева, где данная матрица -
изображающая матрица оператора в станд. базисе. Вот
ее и надо найти.

Теперь посмотрим на одно простое соображение:

$$\langle \vec{x}, \vec{f} \rangle_{R^4} \vec{f} = \vec{f} \begin{pmatrix} \vec{f}^T & \vec{x} \end{pmatrix}$$

$$\text{Действительно, } \langle \vec{x}, \vec{f} \rangle_{R^4} = \vec{f}^T \vec{x} = (f_1 f_2 f_3 f_4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^4 x_k f_k$$

Таким образом

$$\langle \vec{x}, \vec{f} \rangle \vec{f} = (\vec{f} \vec{f}^T) \vec{x} \text{ по силу}\newline \text{ассоциативности произведения матриц.}$$

А $\vec{f} \vec{f}^T = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} (f_1 f_2 f_3 f_4)$ - квадратная
матрица. Теперь

$$P_F \vec{x} = (\times f_1) f_1 + (\times f_2) f_2 =$$

$$= \left(f_1 \vec{f}_1 \vec{f}_1^T + f_2 \vec{f}_2 \vec{f}_2^T \right) \vec{x} =$$

$$= \left(\frac{1}{15} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} (1213) + \frac{1}{2685} \begin{pmatrix} 16 \\ -13 \\ 46 \\ -12 \end{pmatrix} (16-13\ 46-12) \right) \vec{x}$$

$$= \frac{1}{2685} \left(179 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 \cdot 16 & -13 \cdot 16 & 46 \cdot 16 & -12 \cdot 16 \\ -16 \cdot 13 & 13 \cdot 13 & -46 \cdot 13 & 12 \cdot 13 \\ 16 \cdot 46 & -13 \cdot 46 & 46 \cdot 46 & -12 \cdot 46 \\ -16 \cdot 12 & 13 \cdot 12 & -46 \cdot 12 & 12 \cdot 12 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2685} \begin{pmatrix} 150 & 435 & 885 & 915 & 345 \\ 435 & 150 & 885 & -240 & 1230 \\ 885 & 885 & 150 & 2295 & -15 \\ 915 & -240 & 2295 & 1755 & 345 \\ 345 & 1230 & -15 & 1755 & 150 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{179} \begin{pmatrix} 29 & 10 & 61 & 23 \\ 10 & 59 & -16 & 82 \\ 61 & -16 & 153 & -1 \\ 23 & 82 & -1 & 117 \end{pmatrix} = \textcircled{S}$$

Умак, маңыза $\mathcal{S} = [P_F]_e$

(e - стандарт. базасы \mathbb{R}^4) аны, ки то же самое, P_F :

$$\vec{x} \rightarrow \mathcal{S}\vec{x} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^4.$$

Ну, а тенерб

$$\begin{aligned} \vec{f} &= \mathcal{S}\vec{x} = \frac{1}{179} \begin{pmatrix} 29 & 10 & 61 & 23 \\ 10 & 59 & -16 & 82 \\ 61 & -16 & 153 & -1 \\ 23 & 82 & -1 & 117 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{179} \begin{pmatrix} 174 + 30 + 305 + 207 \\ 60 + 177 - 80 + 738 \\ 366 - 48 + 765 - 9 \\ 138 + 246 - 5 + 1053 \end{pmatrix} = \frac{1}{179} \begin{pmatrix} 716 \\ 895 \\ 1074 \\ 1432 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}.$$