# Лекция 19.03. Евклидовы пространства

§1. Определение скалярного произведения.
Нер-ва Коши-Буняковского и треугольника.
Норма вектора.
Примеры.

<u>Опр. 1</u> Вещественное линейное пространство $E$ наз. евклидовым $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ задано отображение $E \times E \to \mathbb{R}$ (называемое скалярным произведением; обозн. $(\vec{x}, \vec{y})_E$) удовлетворяющее следующим свойствам:

1. $(\vec{x}, \vec{y})_E = (\vec{y}, \vec{x})_E \quad \forall\, \vec{x}, \vec{y} \in E$ (симметричность)
2. $(\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2, \vec{y})_E = \alpha_1 (\vec{x}_1, \vec{y})_E + \alpha_2 (\vec{x}_2, \vec{y})_E$
   $\forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \quad \forall\, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y} \in E$ (линейность по первому аргументу)
3. $(\vec{x}, \vec{x})_E > 0 \quad \forall\, \vec{x} \in E, \vec{x} \neq \vec{0}$
   (положительная определенность)

<u>Следствия опр. 1</u>

1. $(\vec{0}, \vec{y})_E = (\vec{y}, \vec{0})_E = 0 \quad \forall\, \vec{y} \in E$

Действительно $(\vec{0}, \vec{y}) = (0 \cdot \vec{0} + 0 \cdot \vec{0}, \vec{y}) = 0(\vec{0}, \vec{y}) + 0(\vec{0}, \vec{y}) = 0$

2. $(\vec{x}, \beta_1 \vec{y}_1 + \beta_2 \vec{y}_2)_E = \beta_1 (\vec{x}, \vec{y}_1)_E + \beta_2 (\vec{x}, \vec{y}_2) \quad \forall\, \vec{x}, \vec{y}_{1,2} \in E$
   $\forall\, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$

Доказательство

$$(\vec{x}, \beta_1 \vec{y}_1 + \beta_2 \vec{y}_2)_E = (\beta_1 \vec{y}_1 + \beta_2 \vec{y}_2, \vec{x})_E = \beta_1 \underset{\substack{\| \\ (\vec{x}\, \vec{y}_1)}}{(\vec{y}_1, \vec{x})} + \beta_2 \underset{\substack{\| \\ (\vec{x}\, \vec{y}_2)}}{(\vec{y}_2, \vec{x})}$$

<u>Опр. 2</u> Комплексное линейное пространство $H$ наз. унитарным (или комплексным евклидовым) $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ задано отображение $H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ (называемое скалярным произведением; обозн. $(\vec{x}, \vec{y})_H$) удовлетворяющее следующим свойствам:

1. $(\vec{x}, \vec{y})_H = \overline{(\vec{y}, \vec{x})_H}$ $\forall \vec{x}, \vec{y} \in H$ (Эрмитовость скалярного произведения!)

2. $(\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2, \vec{y})_H = \alpha_1 (\vec{x}_1, \vec{y})_H + \alpha_2 (\vec{x}_2, \vec{y})_H$ $\forall \alpha_{1,2} \in \mathbb{C}$ $\forall \vec{x}_{1,2}, \vec{y} \in H$ (Линейность по первому аргументу).

3. $(\vec{x}, \vec{x}) > 0$ $\forall \vec{x} \in H$, $\vec{x} \neq \vec{0}$ (положительная определенность).

Следствия опр. 2.

1. $(\vec{0}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{0}) = 0$ $\forall \vec{y} \in H$

Доказательство – такое же, как в вещественном случае.

2. $(\vec{x}, \beta_1 \vec{y}_1 + \beta_2 \vec{y}_2)_H = \overline{\beta_1} (\vec{x}, \vec{y}_1)_H + \overline{\beta_2} (\vec{x}, \vec{y}_2)$

Действительно, $(\vec{x}, \beta_1 \vec{y}_1 + \beta_2 \vec{y}_2)_H = \overline{(\beta_1 \vec{y}_1 + \beta_2 \vec{y}_2, \vec{x})_H} =$

$= \overline{\beta_1 (\vec{y}_1 \vec{x})_H + \beta_2 (\vec{y}_2 \vec{x})_H} = \overline{\beta_1} \overline{(y_1 x)_H} + \overline{\beta_2} \overline{(\vec{y}_2 \vec{x})} = \overline{\beta_1} (\vec{x} \vec{y}_1)_H + \overline{\beta_2} (\vec{x}, \vec{y}_2)$

Доказанное свойство называется свойством полулинейности (или антилинейности) скалярного произведения по второму аргументу. Часто комплексное скалярное произведение, тем самым, называют <u>полуторалинейным</u> функционалом.

Следующие свойства мы сформулируем для комплексных пространств. В случае вещественных пространств надо просто убрать все знаки комплексного сопряжения.

1. $\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{x}_k, \vec{y}\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\vec{x}_k, \vec{y})$

2. $\left(\vec{x}, \sum_{k=1}^{m} \beta_k \vec{y}_k\right) = \sum_{k=1}^{m} \overline{\beta_k} (x, \vec{y}_k)$

3. $\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{x}_k, \sum_{j=1}^{m} \beta_j \vec{y}_j\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left(\vec{x}_k, \sum_{j=1}^{m} \beta_j \vec{y}_j\right) =$

$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_k \overline{\beta_j} (\vec{x}_k, \vec{y}_j)$

4. Если $\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{x}_k$, то

$(\vec{x}, \vec{x}) = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{x}_k, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{x}_j\right) =$

$= \sum_{k,j=1}^{n} \alpha_k \overline{\alpha_j} (\vec{x}_k, \vec{x}_j)$

5. Как частный случай св-ва 4 в случае $\alpha_k = 1$: $\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} \vec{x}_k$

$(\vec{x}, \vec{x}) = \left(\sum_{k=1}^{n} \vec{x}_k, \sum_{j=1}^{n} \vec{x}_j\right) = \sum_{k,j=1}^{n} (\vec{x}_k, \vec{x}_j) =$

$= \sum_{\substack{k=1 \\ k=j}}^{n} (\vec{x}_k, \vec{x}_j) + \sum_{\substack{j,k=1 \\ j<k}}^{n} (\vec{x}_k, \vec{x}_j) + \sum_{\substack{j,k=1 \\ j>k}}^{n} (\vec{x}_k, \vec{x}_j) =$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\vec{x}_k, \vec{x}_k) + \sum_{\substack{j,k=1 \\ j<k}}^{n} (\vec{x}_k \vec{x}_j) + \sum_{\substack{j,k=1 \\ j<k}}^{n} (\vec{x}_j \vec{x}_k) = (*)$$

(В третьем слагаемом я просто поменял названия индексов $j$ и $k$ местами:

$$\sum_{\substack{j,k=1 \\ j>k}}^{n} a_{jk} = \sum_{\substack{j,k=1 \\ j<k}}^{n} a_{kj} \Bigg)$$

Итак, $(*) = \sum_{k=1}^{n} (x_k, x_k)_H + \sum_{\substack{j,k=1 \\ j<k}}^{n} 2\,\mathrm{Re}\,(\vec{x}_k, \vec{x}_j)$

Действительно $(\vec{x}_k, \vec{x}_j) = \overline{(\vec{x}_j \vec{x}_k)}$, и, тем самым,

$(\vec{x}_k, \vec{x}_j) + (\vec{x}_j \vec{x}_k) = 2\,\mathrm{Re}\,(\vec{x}_k \vec{x}_j)$.

5'. В частности

$$(\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{x}_1 + \vec{x}_2)_H = (\vec{x}_1 \vec{x}_1)_H + (\vec{x}_2 \vec{x}_2)_H + 2\,\mathrm{Re}\,(\vec{x}_1 \vec{x}_2)_H$$

6. $(\alpha\vec{x}, \alpha\vec{x}) = \underbrace{\alpha\bar{\alpha}}_{|\alpha|^2} (\vec{x}, \vec{x})$

Примеры

$1^{\mathbb{R}}$. $E = \mathbb{R}^n$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_{\mathbb{R}^n} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x^T y = (x_1 x_2 \dots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = y^T x.$$

Все свойства скалярного произведения выполнены. Симметричность очевидна. Линейность по первому аргументу $(\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2, \vec{y}) =$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\alpha_1 (x_1)_k + \alpha_2 (x_2)_k) y_k = \alpha_1 \sum (x_1)_k y_k + \alpha_2 \sum (x_2)_k y_k.$$

Положительная определенность

$$(\vec{x}, \vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$ Ясно, что $(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$.

Ясно также, что $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 0$ тогда и только тогда, когда все компоненты $x_k = 0$, т.е. когда $\vec{x} = \vec{0}$.

$1^{\mathbb{C}}$ $H = \mathbb{C}^n$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_{\mathbb{C}^n} = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$$

Эрмитовость: $\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle = \sum_{k=1}^{n} y_k \overline{x_k} =$

$= \overline{\sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}} = \overline{\langle x, y \rangle}$. Линейность по первому аргументу и положительная определенность проверяются точно так же, как в вещественном случае.

Скалярные произведения примеров $1^{\mathbb{R}}$ и $1^{\mathbb{C}}$ носят названия „стандартных". В принципе, в этих пространствах можно ввести и другие скалярные произведения. Например:

2 $E = \mathbb{R}^2$

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \frac{1}{2} x_1 y_2 + \frac{1}{2} x_2 y_1$$

Симметричность и линейность очевидны.

$$(\vec{x}, \vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 = \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} x_2^2 .$$

Это выражение, очевидно, неотрицательно.

$$(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \iff x_2 = 0 \text{ и } x_1 + \frac{x_2}{2} = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}.$$

---

В дальнейшем (как и на стр. 5) мы для стандартного скалярного произведения всегда будем использовать обозначение с угловыми скобками: $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ / $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^n}$.

Содержательным является также и вопрос об общем виде скалярного произведения в пространстве столбцов. Ответ на этот вопрос будет дан позднее.

2. $E = \Omega_n$ (пространство полиномов с вещественными коэффициентами); $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

$$(p, q)_E = \int_a^b p(t)\, q(t)\, dt$$

Симметричность очевидна.

Линейность: $(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2, q) = \int_a^b (\alpha_1 p_1(t) + \alpha_2 p_2(t))\, q(t)\, dt$

$$= \alpha_1 \int_a^b p_1(t) q(t)\, dt + \alpha_2 \int_a^b p_2(t) q(t)\, dt.$$

Положительная определенность:

$$(p, p) = \int_a^b |p(t)|^2\, dt$$

Ясно, что $(p, p) \geq 0$. Однако, так как ф-ция $|p(t)|^2$ непрерывна и неотрицательна, то

$$\int_a^b |p(t)|^2 dt = 0 \iff p(t) = 0 \ \forall t \in [a, b].$$

А это значит, что все коэффициенты $p(t)$ нулевые; т.е. $p$ - нулевой вектор в $\Omega_n$.

2°. $H = \Omega_n^{\mathbb{C}}$ (пр-во полиномов с комплексными коэффициентами)

$$(p, q)_H = \int_a^b p(t)\, \overline{q(t)}\, dt.$$

Эрмитовость: $(q, p)_H = \int_a^b q(t)\, \overline{p(t)}\, dt = \overline{\int_a^b p(t)\, \overline{q(t)}\, dt} = \overline{(p, q)_H}$

Остальные св-ва проверяются так же, как в вещественном случае.

## Неравенство Коши-Буняковского

Th

] $H$ - комплексное евклидово пространство. Тогда $\forall\ \vec{x}, \vec{y} \in H$

$$|(\vec{x}, \vec{y})|^2 \leq (\vec{x}, \vec{x}) \cdot (\vec{y}\ \vec{y}).$$

Доказательство.

Неравенство, очевидно, справедливо в том случае, когда $\vec{x} = \vec{0}$ или $\vec{y} = \vec{0}$. Предположим, что оба вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ отличны от $\vec{0}$.

Рассмотрим $\vec{z} = \vec{x} + te^{i\alpha}\vec{y}$, $t \in \mathbb{R}$, $\alpha \in [0, 2\pi)$

$$(\vec{z}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{x}) + (te^{i\alpha}\vec{y}, te^{i\alpha}\vec{y}) +$$

$$+ 2\,\mathrm{Re}\,(\vec{x}, te^{i\alpha}\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{x}) + t^2 e^{i\alpha} e^{-i\alpha} (\vec{y}, \vec{y})$$

$$+ 2\,\mathrm{Re}\, te^{-i\alpha}(\vec{x}, \vec{y}).$$ (Здесь учтено: $(\gamma\vec{y}, \gamma\vec{y}) = \gamma\bar{\gamma}(\vec{y}, \vec{y})$, $\overline{e^{i\alpha}} = e^{-i\alpha}$). Теперь возьмем $\alpha$ равным аргументу $(\vec{x}, \vec{y})$. Тогда $e^{-i\alpha}(\vec{x}, \vec{y}) = |(\vec{x}, \vec{y})|$.

Тем самым

$$(\vec{z},\vec{z})_H = t^2\overset{0}{\overset{\wedge}{(\vec{y},\vec{y})_H}} + 2t|(\vec{x},\vec{y})| + \overset{0}{\overset{\wedge}{(\vec{x},\vec{x})}}.$$

В правой части стоит квадратный трехчлен вещественного аргумента $t$ с вещественными коэффициентами. При всех $t$ $(\vec{z},\vec{z}) \geq 0$. Значит, дискриминант данного квадратного трехчлена неположителен:

$$4|(\vec{x},\vec{y})|^2 - 4(\vec{x},\vec{x})(\vec{y},\vec{y}) \leq 0$$

что и доказывает теорему.

Аналогичная теорема, естественно, справедлива и в вещественном пространстве:

Th.

] $E$ – евклидово пространство. Тогда $\forall \vec{x},\vec{y} \in E$ $|(x,y)|^2 \leq (\vec{x},\vec{x})(\vec{y},\vec{y})$.

<u>Доказательство</u> дублирует уже сформированное нами доказательство в комплексном случае. Берем $\alpha = 0$.

$$(\vec{z},\vec{z}) = (\vec{x}+t\vec{y}, \vec{x}+t\vec{y}) = (\vec{x},\vec{x}) + t^2(\vec{y},\vec{y}) + 2t(\vec{x},\vec{y})$$

(Знак вещественной части неуместен, все скалярные произведения – вещественны). $(\vec{z},\vec{z}) \geq 0 \ \forall t \Longrightarrow 4|(x,y)|^2 - 4(x,x)(y,y) \leq 0$,

г. и т.д.

# Норма вектора

**Опр** ] $E$ – вещественное или комплексное евклидово пространство. Нормой вектора $\vec{x}$ наз. величина $\|\vec{x}\|_E = \sqrt{(\vec{x},\vec{x})_E}$.

Св-ва нормы

1) $\|\vec{x}\|_E > 0 \quad \forall \vec{x} \in E,\ \vec{x} \neq \vec{0}$. $\|\vec{0}\|_E = 0$.

2) $\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha|\,\|\vec{x}\| \quad \forall \vec{x} \in E,\ \forall \alpha \in \mathbb{K}$. ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ в соотв. с типом пр-ва $E$)

Д-во: $(\alpha\vec{x}, \alpha\vec{x}) = |\alpha|^2 (\vec{x},\vec{x})$.

3) $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \quad \forall \vec{x},\vec{y} \in E$

(Нер-во треугольника).

Д-во: $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = (\vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y}) = \|x\|^2 + \|y\|^2 +$

$+ (\vec{x},\vec{y}) + (\vec{y},\vec{x}) \underset{\text{Нер-во КБ}}{\leq} \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| =$

$= (\|x\| + \|y\|)^2$.

$\Big( (\vec{x},\vec{y}) + (\vec{y},\vec{x}) \leq 2\,|(x,y)| \leq 2\,(x,x)^{1/2}(y,y)^{1/2}$ –

использовано неравенство Коши-Буняковского).

4) $\|\vec{x} \pm \vec{y}\| \geq \big|\, \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \,\big|$

(обратное неравенство треугольника)

<u>Д-во</u>. Т.к. $x = (\vec{x} \pm \vec{y}) \mp \vec{y}$, то

$$\|\vec{x}\| \leq \|\vec{x} \pm \vec{y}\| + \|\mp \vec{y}\| \iff$$

$$\iff \|\vec{x} \pm \vec{y}\| \geq \|\vec{y}\| - \|\vec{x}\|.$$

Меняя роли $\vec{x}$ и $\vec{y}$, получаем

$$\|\vec{y} \pm \vec{x}\| \geq \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|$$

$$\|\vec{y} \pm \vec{x}\| = \|\vec{x} \pm \vec{y}\|$$

Ну а если $a > b$ и $a > -b$, то $a > |b|$, что и доказывает св-во 4.

Отметим, что скалярное произведение, в свою очередь, может быть выражено через норму.

Действительно

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{x})$$

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - (\vec{x}, \vec{y}) - (\vec{y}, \vec{x}) \qquad (*)$$

Вычитаем

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 2(\vec{x}, \vec{y}) + 2(\vec{y}, \vec{x})$$

Таким образом, в случае вещественного евклидова пространства

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2\right)$$

А в случае комплексного

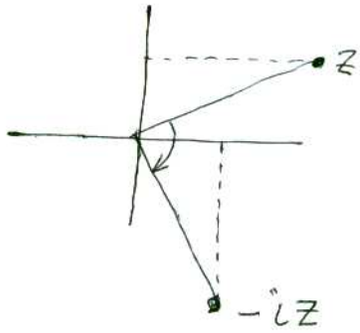
$$\mathrm{Re}\,(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2\right)$$

$$\| $$

$$\frac{1}{2}(x,y) + \frac{1}{2}(y,x)$$

Заметим, что

$$\mathrm{Im}\, z = \mathrm{Re}(-iz) \quad :$$




Таким образом

$$\mathrm{Im}\,(\vec{x}, \vec{y}) = \mathrm{Re}\left(-i(\vec{x}, \vec{y})\right) = \mathrm{Re}\,(\vec{x}, i\vec{y}) = \frac{1}{4}\left(\|\vec{x}+i\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-i\vec{y}\|^2\right)$$

И, окончательно

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \mathrm{Re}(\vec{x}, \vec{y}) + i\,\mathrm{Im}(\vec{x}, \vec{y}) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - i\,\|x-iy\|^2\right).$$

Вернемся на стр. 11. Складывая строки в (*), получаем

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \; -$$

тождество о диагоналях параллелограмма.

Примеры.

1$^{\mathbb{R}}$. $E = \mathbb{R}^n$, скалярное произведение – стандартное.

Тогда $\|x\| = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2}$

1$^{\mathbb{C}}$ $E = \mathbb{C}^n$, скалярное произведение – стандартное.

Тогда $\|x\| = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2}$

2. $E = \Omega_n$, $\left(p,q) = \int\limits_a^b p(t)\overline{q(t)}\,dt\right)$

$$\|p\| = \left(\int\limits_a^b |p(t)|^2 dt\right)^{1/2}$$

---

Ильин, Позняк Линейная алгебра изд. 4, 1999

Глава 4 §1, §3.