§ 8. Сопряженный оператор.

<u>Опр.</u>

] E, F – конечномерные евклидовы пространства одного типа (вещественные или комплексные), $A \in \Lambda(E,F)$, $B \in \Lambda(F,E)$.

Оператор B наз. сопряженным к оператору A (обозн. $B = A^*$) $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $(Ax, y)_F = (x, By)_E$ $\forall x \in E, y \in F$.

(Отметим, что точнее было бы говорить о сопряженных друг к другу операторах: $B = A^* \Leftrightarrow A = B^*$ – в определение A и B входят, по сути, симметрично).

В первую очередь нам надо удостовериться в существовании и единственности сопряженного оператора. Итак

<u>Th</u>] E, F – конечномерные евклидовы пространства одного типа, $\forall A \in \Lambda(E,F)$ $\exists!\, B \in \Lambda(F,E)$: $B = A^*$.

<u>Д-во</u>] $n = \dim E$, $m = \dim F$.

Существование. Введем в рассмотрение ортонормированные базисы двух рассматриваемых пространств. Пусть $\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n$ – ОНБ E; $\vec{f}_1 \dots \vec{f}_m$ – ОНБ F. Рассмотрим изображающую матрицу $a \in M(m \times n)$ оператора A в этой паре базисов: $a = [A]_{\mathbb{e},\mathbb{f}}$,

$$A\vec{e}_k = \sum_{s=1}^{m} a_{sk}\vec{f}_s, \quad k=1\dots n.$$

Теперь рассмотрим матрицу $b = a^* \in M(n\times m)$.

Зададим оператор B, задав образы векторов $f_1 \dots f_m$:

$$B\vec{f}_j = \sum_{p=1}^{n} b_{pj}\vec{e}_p = \sum_{p=1}^{n} \bar{a}_{jp}\vec{e}_p, \quad j=1\dots m.$$

Тогда

$$(A\vec{e}_k, \vec{f}_j)_F = \left(\sum_{s=1}^{m} a_{sk}\vec{f}_s, \vec{f}_j\right)_F = \sum_{s=1}^{m} a_{sk}\underbrace{(\vec{f}_s, \vec{f}_j)_F}_{\substack{0 \ s\neq j \\ 1 \ s=j}} = a_{jk}$$

$$\left(\vec{e}_k, B\vec{f}_j\right)_E = \left(\vec{e}_k, \sum_{p=1}^{n} \bar{a}_{jp}\vec{e}_p\right)_E = \sum_{p=1}^{n} a_{jp}\underbrace{(\vec{e}_k, \vec{e}_p)_E}_{\substack{0 \ k\neq p \\ 1 \ k=p}} = a_{jk}$$

Итак, $\forall k=1\dots n$, $\forall j=1\dots m$ $(A\vec{e}_k, \vec{f}_j) = (\vec{e}_k, B\vec{f}_j)$. Значит

$$\forall \alpha_1 \dots \alpha_n \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (Ae_k, f_j)_F = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\vec{e}_k, B\vec{f}_j)_E$$

Тем самым $\forall x \in E$ $(x = \sum \alpha_k \vec{e}_k)$ $(Ax, f_j)_F = (x, Bf_j)_E$

Значит $\forall \beta_1 \dots \beta_m$ $\sum_{j=1}^{m} \bar{\beta}_j (Ax, f_j)_F = \sum_{j=1}^{m} \bar{\beta}_j (Ax, f_j)$.

Поэтому $\forall y \in F$ $(y = \sum_j \beta_j \vec{f}_j)$ $(Ax, y) = (x, By)$.

Итак, мы доказали, что введенный нами линейный оператор B и есть A^*.

Единственность. $\exists\, B = A^*$, $\tilde{B} = A^*$. Тогда

$$\forall \vec{x} \in E,\ \forall y \in F \quad (A\vec{x}, \vec{y})_F = (\vec{x}, \tilde{B}\vec{y})_E = (\vec{x}, \tilde{B}y)_E.$$

Значит $(\vec{x}, (\tilde{B}-B)\vec{y})_E = 0 \quad \forall \vec{x}$. $(\tilde{B}-B)\vec{y}$,

тем самым, ортогонален всему пространству E, а поэтому $(\tilde{B}-B)\vec{y} = \vec{0} \quad \forall \vec{y} \in F$. Оператор, переводящий все вектора в $\vec{0}$ - нулевой. Итак, $B = \tilde{B}$. Сопряженный оператор единственен.

Итак, мы видим, что сопряженный оператор — это оператор, изображающая матрица которого в паре ОНБ ~~эрмитово сопря~~ эрмитово сопряжена с матрицей исходного оператора. Т.е., определение сопряженного оператора — обобщение леммы о переброске.

Отметим, что в случае пространств столбцов $E = \mathbb{C}^n$, $F = \mathbb{C}^m$ оператор, сопряженный к оператору умножения столбца на матрицу слева $\left(M_a : \vec{x} \longrightarrow a\vec{x} \quad , \ a \in M(m \times n) \right)$ есть

оператор $M_{a^*} : y \longrightarrow a^* y$, $a^* \in M(n \times m)$.

Это и есть лемма о переброске.

<u>Th</u>] E, F - конечномерные евклидовы пространства, $A \in \Lambda(E, F)$. Тогда $\operatorname{Ker} A^* = (R(A))^{\perp}$.

<u>Д-во</u>

$y \in \operatorname{Ker} A^* \iff A^* \vec{y} = \vec{0} \iff (\vec{x}, A^* \vec{y})_E = 0 \ \forall \vec{x} \in E$ *)

$\iff (A\vec{x}, \vec{y})_F = 0 \ \forall \vec{x} \in E \iff \vec{y} \perp R(A)$. $\square$.

*) NB: $\underset{\in E}{\vec{z}} = \vec{0} \iff (\vec{x}, \vec{z}) = 0 \ \forall \vec{x} \in E$.

Отметим что, в силу теоремы о проекции, $\forall$ подпространства G пространства F верно, что $G^{\perp\perp} = G$.

Таким образом

$$\vec{y} \in R(A) \Leftrightarrow \vec{y} \in (R(A))^{\perp\perp} \Leftrightarrow \vec{y} \perp (R(A))^{\perp} = \operatorname{Ker} A^*.$$

То есть необходимое и достаточное условия разрешимость уравнения (относительно $\vec{x}$) $A\vec{x} = \vec{y}$ состоит в ортогональности $\vec{y}$ ядру оп-ра A^*.

Отметим также, что $\vec{y} \perp \operatorname{Ker} A^* \Leftrightarrow \vec{y} \perp \vec{g}_1 \dots \vec{g}_s$ – базису $\operatorname{Ker} A^*$.

Полученное нами утверждение представляет собой обобщение утверждения о разрешимости НЛС. Действительно, пусть $E = \mathbb{C}^n$, $F = \mathbb{C}^m$, $a \in M(m \times n)$

$M_a \in \Lambda(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$; $M_a : \vec{x} \to a\vec{x}$.

$M_a^* \in \Lambda(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$; $(M_a)^* \ \vec{y} \to a^*\vec{y}$.

НЛС $(a / \vec{y})$ разрешима $\Leftrightarrow \vec{y} \in R(M_a)$

$\Leftrightarrow \vec{y} \perp \operatorname{Ker} M_a^* \Leftrightarrow \vec{y} \perp$ всем решениям ОЛС $(a^* / \vec{0})$.

Все результаты данного параграфа справедливы как в вещественных, так и в комплексных пространствах. Мы проводили все доказательства в случае комплексных пространств, в вещественном случае, естественно, исчезнут все комплексные сопряжения (матрица, сопряженная к вещественной — транспонированная к ней).

Вставной ∃ б/н — о сужении операторов.

$\exists\ A \in \Lambda(E,F)$, G - подпространство E.

$\nexists$ сужение A на G:

$$A/_G : \vec{x} \to A\vec{x}, \ \vec{x} \in G$$

Ясно, что $A/_G \in \Lambda(G,F)$.

~~Задача к ∃ Доказать~~

Задачи к ∃. (решения приложу по запросу)

1. $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$. 2. $(A+B)^* = A^* + B^*$.

3. $A \in \Lambda(E,F)$, $B \in \Lambda(F,G)$. $(AB)^* = B^* A^*$

§ 9 Самосопряженные операторы.

<u>Опр.</u>

] E - конечномерное евклидово пространство, $A \in \Lambda(E)$.
A наз. самосопряженным $\Leftrightarrow A = A^*$.

<u>Утв.</u>

] $\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n$ - ОНБ E, $A = A^* \Leftrightarrow [A]_{\mathcal{E}}$ - эрмитова.

<u>Д-во</u>

] $a = [A]_{\mathcal{E}}$, $\mathcal{E}$ - ОНБ. Тогда $[A^*]_{\mathcal{E}} = a^*$ (см. предыдущий §). Тем самым $A = A^* \Leftrightarrow a = a^*$.

<u>Замечание</u>: теперь мы рассматриваем операторы, действующие из E в E. $A \in \Lambda(E) \equiv \Lambda(E,E) \Rightarrow$
$\Rightarrow A^* \in \Lambda(E,E) = \Lambda(E)$.

<u>Утв</u> Всякий оператор ортогонального проектирования самосопряжен.

Д-во.] F - подпр-во E, P_F - оператор проектирования на F. Мы доказывали, что $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E$

$$(P_F\vec{x}, P_F\vec{y})_E = (\vec{x}, P_F\vec{y})_E = (P_F\vec{x}, \vec{y})_E.$$

Но последнее равенство и означает, что $P_F = P_F^*$.

<u>Задача*</u>

] $P \in \Lambda(E)$, $P = P^*$, $P^2 = P$. Тогда P - оператор ортогонального проектирования на $F = R(P)$.

<u>Утв.</u>

] E - конечномерное евкл. пр-во, $A \in \Lambda(E)$, $A = A^*$. Тогда спектр A вещественен, собственные ~~вектора~~ подпр-ва A, отвечающие различным собственным значениям - ортогональны друг другу.

Д-во

] $e_1 \dots e_n$ - ОН базис E, $a = [A]_e$.

Матрица a эрмитова $\Rightarrow$ все ее собственные значения вещественны (собственные значения A - это же и есть собств. значения a).

] $\lambda \neq \mu$ $\quad A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ $(\vec{x} \neq \vec{0})$, $A\vec{y} = \mu\vec{y}$ $(\vec{y} \neq \vec{0})$

$$\begin{array}{ccc} (Ax, y)_E & \overset{A=A^*}{=\!=} & (x, Ay) \\ \| & & \| \ \mu \in \mathbb{R} \\ \lambda(x, y)_E & & \mu(x, y)_E \end{array}$$

$$\Rightarrow (\mu - \lambda)(x, y)_E = 0 \underset{\mu \neq \lambda}{\Longrightarrow} \vec{x} \perp \vec{y} \qquad \square$$

И, наконец, основная

<u>Теорема</u> $\exists$ E - конечномерное евклидово пространство, $A = A^* \in \Lambda(E)$. Тогда A диагонализуем, более того, $\exists$ ОН базис E, все элементы которого являются собственными векторами оператора A.

<u>Доказательство</u>

Доказательство проведем методом математической индукции по размерности пространства E.

<u>База</u> $\dim E = 1$. В пространстве размерности 1 всякий оператор диагонализуем, а $\forall$ вектор, равный 1 по норме - образует ОНБ. Итак, база тривиальна.

<u>Переход</u> Допустим, что теорема верна в пространстве размерности n. Предположим теперь, что $\dim E = n+1$, $A \in \Lambda(E)$, $A = A^*$.

Спектр оператора не может быть пуст (всякий полином, в т.ч. и $p_A(t)$ имеет хотя бы один корень в $\mathbb{C}$). Итак, $\exists \lambda \in \sigma(A)$. Заметим, что $\lambda \in \mathbb{R}$, так как $A = A^*$. $\exists f$ - единичный собственный вектор: $Af = \lambda f$, $\|f\| = 1$.

А теперь введем в рассмотрение

$$\tilde{E} = \{\vec{f}\}^{\perp} = \{x \in E : x \perp \vec{f}\}$$

$\tilde{E}$ – ортогональное дополнение к подпр-ву $\{\alpha \vec{f}\}_{\alpha}$, которое имеет размерность 1. Значит, $\dim \tilde{E} = n$.

Заметим, что если $\vec{x} \in \tilde{E}$, то $A\vec{x} \in \tilde{E}$.

Действительно

$$(A\vec{x}, \vec{f}) \overset{A=A^*}{=} (\vec{x}, A\vec{f}) = (\vec{x}, \lambda \vec{f}) \overset{\lambda \in \mathbb{R}}{=}$$

$$= \lambda (\vec{x}, \vec{f}) = 0.$$

Рассмотрим оператор $\tilde{A} \in \Lambda(\tilde{E})$ являющийся сужением A на $\tilde{E}$: $\tilde{A}: \underset{\tilde{E}}{\underset{\cap}{x}} \to \underset{\tilde{E}}{\underset{\cap}{Ax}}$.

Отметим, что $(Ax, y) = (x, Ay)\ \forall x, y \in E \Rightarrow$

$\Rightarrow (Ax, y) = (x, Ay)\ \forall x, y \in \tilde{E} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\tilde{A}x, y) = (x, \tilde{A}y)\ \forall x, y \in \tilde{E} \Rightarrow \tilde{A}$ – самосопряжен.

Но, т.к. $\dim \tilde{E} = n$, то (в силу предположения ММН) $\exists$ ОН базис пр-ва $\tilde{E}$, составленный из собственных векторов оператора $\tilde{A}$.

Итак, $\exists\ f_1 \dots f_n$ - ОН базис $\tilde{E}\ (\subset E)$

$$A\vec{f_k} = \tilde{A}\vec{f_k} = \lambda_k \vec{f_k} \quad (\lambda_k \in \mathbb{R},$$

в принципе, могут и совпадать друг с другом).

$\exists\ \vec{f}_{n+1} = \vec{f}$ (введенный ранее).

$\|\vec{f}_{n+1}\| = 1$, $\vec{f}_{n+1} \perp \tilde{E} = \mathcal{L}\{\vec{f}_1 \dots \vec{f}_n\}$, $A\vec{f}_{n+1} = \lambda \vec{f}_{n+1}$.

Итак, система $\vec{f}_1 \dots \vec{f}_n, \vec{f}_{n+1}$ - ОНС.

Число ее эл-тов равно $\dim E \Rightarrow \vec{f}_1 \dots \vec{f}_{n+1}$ - ОНБ E.

Все вектора $\vec{f}_k$ - собственные вектора оператора A.

Теорема доказана.

<u>Следствие</u> (самое важное в дальнейшем!)

Всякая эрмитова матрица унитарно эквивалентна диагональной. (в т.ч. это верно для вещественных симметричных матриц).

<u>Д-во</u>

$\exists\ a = a^* \in M(n \times n)$. Тогда $M_a : x \to ax \in \Lambda(\mathbb{C}^n)$ - самосопряженный оператор. $\exists\ \vec{f}_1 \dots \vec{f}_n$ - ОН базис собств. векторов M_a. Тогда $U \in M(n \times n)$, $U_{\circ k} = \vec{f}_k$ - унитарная матрица, $U^{-1} a U = [M_a]_f$ - диагональна.

И, наконец

Спектральная теорема

] $\dim E = n < \infty$, $A = A^* \in \Lambda(E)$.

] $\sigma(A) = \{\lambda_1 \dots \lambda_m\}$, $F_j = \operatorname{Ker}(A - \lambda_j I)$ – собств. подпространства оператора A.

Тогда $A = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j P_j$, где P_j – ортопроектор на F_j.

Доказательство

] f – собственный вектор A, отвеч. с. значению λ_j.

Тогда $P_j f = f$, $P_s f = 0$ $(s \neq j)$ в силу ортогональности собственных подпространств. Поэтому

$$Af = \lambda_j f$$

$$\sum_{s=1}^{m} \lambda_s \underbrace{P_s f}_{\substack{f \ s=j \\ 0 \ s\neq j}} = \lambda_j f. \quad \text{т.е.} \quad Af = \sum_{s=1}^{m} \lambda_s P_s.$$

Тем самым $A f_j = \left(\sum_{s=1}^{m} \lambda_s P_s\right) f_j \ \forall j$, где $\{f_1 \dots f_n\}$ – ОН базис, составленный

из собственных векторов оператора A.

Ну а если $Af_j = Bf_j \ \forall j$, то

$Ax = Bx \quad \forall x = \sum_k \alpha_k f_k$. То есть, если два оператора одинаково действуют на все вектора некоторого базиса, то эти операторы совпадают. $\square$.

Как и в предыдущем параграфе, все результаты текущего равно справедливы как в случае вещественного, так и в случае комплексного пространства.

Отмечу дополнительно (~~[illegible]~~), что

(Следствие $\mathbb{R}$) Всякая вещественная симметричная матрица a унитарно эквивалентна диагональной.

Точнее, $\exists$ <u>ортогональная</u> матрица v такая, что $\underset{\underset{v^*}{\parallel}}{v^{-1}} a v$ - диагональная матрица.

Для доказательства заметим, что в случае вещественной симметричной матрицы a, оп-р $M_a \in \Lambda(\mathbb{R}^n)$ - самосопряжен, а матрица „~~составл~~ U (стр. 11) - вещественная унитарная, т.е. ортогональная.

Пример 1.

В §7 мы уже рассматривали матрицу

$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и соотв. оператор $A = M_a$ в пр-ве $\mathbb{R}^3$.

$a = a^T \Rightarrow A = A^*$. Запишем спектральную теорему для A.

$\lambda = 2$. Собств. вектор – $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, Собств. подпр-во – $\left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ – одномерно. $[P_2] = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 1 \ 1) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda = -1$. Собственное подпр-во двумерно.
ОН базис собств. подпр-ва – $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Проектор задается матрицей $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ -1 \ 0) + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} (1 \ 1 \ -2) =$

$$= \frac{1}{6} \left(\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} = [P_{-1}]$$

. Ясно, что $[P_{-1}] + [P_2] = I$,

$$[-P_1 + 2P_2] = a.$$

(все изобр. матрицы вычислены в станд. базисе $\mathbb{R}^3$).