Разрывные задачи и прямые методы вариационного исчисления. Лекция 29 апреля.

1 мая 2020 г.

1 Разрывные задачи.

Рассмотрим функционал J простейшей задачи

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx.$$

Может случиться, что среди линий класса C_1, соединяющих две данные точки $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$ не существует линии, реализующей экстремум J.

В этом случае естественно посмотреть, не будет ли искомый экстремум достигаться на линиях более общего класса. За такой класс мы примем совокупность кусочно-гладких кривых $y = y(x)$, то есть кривых, принадлежащих классу D_1 (кусочно-гладкие функции).

1.1 Пример 1.

Рассмотрим функционал

$$J[y] = \int_{-1}^{1} dxy^2(1 - y')^2.$$

Этот функционал определен для всех кривых из C_1, соединяющих точки $A(-1, 0)$ и $B(1, 1)$. Для любой такой кривой, очевидно, $J[y] > 0$. Если теперь взять ломаную $y = y(x)$, опеределенную следующим образом

$$y(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

то для нее интеграл имеет смысл и равен нулю. Очевидно, что если эту ломаную закруглить в точке $O(0, 0)$, то получится кривая класса C_1, значение функционала J для которой может быть сколь угодно близким к нулю. Следовательно, нижняя граница значений $J[y]$ равна нулю и на кривых класса C_1 не достигается. Если же от класса C_1 перейти к классу D_1, то эта нижняя граница достигается, и экстремальная задача получает решение.

1.2 Разрывные (в смысле нарушения гладкости) экстремали.

Вновь вернемся к рассмотрению функционала J простейшей задачи

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$$

при том, что начальная и конечная токи экстремали $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$ закреплены. Пусть известно также, что некоторая точка экстремали $C(\tilde{x}, \tilde{y})$, $(x_0 < \tilde{x} < x_1)$ принадлежит кривой $y = f(x)$, разделяющей области D_1 и D_2, содержащие точки A и B соответственно.

Воспользуемся выражением для вариации функционала, полученным при выводе условия трансверсальности:

$$\delta J = \delta J_1 + \delta J_2 = \int_{x_0}^{\tilde{x}} \left(F_y^{'} - \frac{d}{dx} F_{y'}^{'} \right) \delta y dx + \int_{\tilde{x}}^{x_1} \left(F_y^{'} - \frac{d}{dx} F_{y'}^{'} \right) \delta y dx + \tag{1}$$
$$+ \left(\left(F - y' F_{y'}^{'} \right) \delta x + F_{y'}^{'} \delta y \right) |_{(\tilde{x}^-, \tilde{y}^-)} - \left(\left(F - y' F_{y'}^{'} \right) \delta x + F_{y'}^{'} \delta y \right) |_{(\tilde{x}^+, \tilde{y}^+)}.$$

При этом точки с координатами $(\tilde{x}^-, \tilde{y}^-)$ и $(\tilde{x}^+, \tilde{y}^+)$ лежат на экстремали и являются предельными точками слева и справа от точки нарушения гладкости экстремали $(\tilde{x}, \tilde{y})$.

Условие обращения в ноль первой вариации функционала влечет за собой выполнение системы условий

$$F(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y'}^-) - \tilde{y'}^- F_{y'}^{'}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y'}^-) = F(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y'}^+) - \tilde{y'}^+ F_{y'}^{'}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y'}^+), \tag{2}$$

$$F'_{y'}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y'}^{-}) = F'_{y'}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y'}^{+}). \tag{3}$$

Условия (2)-(3) называются **условиями Вейерштрасса-Эрдманна**.

Отметим, что в терминах вваденной ранее функции Гамильтона H и функции момента p условия (2)-(3) переписываются в виде условий непрерывности в точке скачка производной y' на экстремали:

$$H(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y'}^{-}) = H(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y'}^{+}), \tag{4}$$

$$p(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y'}^{-}) = p(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y'}^{+}). \tag{5}$$

1.3 Задача о распространении света через границу раздела двух сред.

Пусть кривая $y = f(x)$ является границей раздела двух сред D_1 и D_2. Пусть функция Лагранжа имеет следующий вид

$$F(x, y, y') = \begin{cases} n_1\sqrt{1+y'^2}, & y(x) < f(x) \\ n_2\sqrt{1+y'^2}, & y(x) > f(x). \end{cases}$$

Здесь коэффициенты n_1 и n_2 являются коэффициентами оптической плотности сред. Функция Лагранжа не зависит от переменной интегрирования x. Следовательно,

$$F - y'F'_{y'} = \begin{cases} \frac{n_1}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1, & y < f(x) \\ \frac{n_2}{\sqrt{1+y'^2}} = C_2, & y > f(x). \end{cases}$$

Отсюда следует, что части экстремали в каждой из областей являются отрезками прямых

$$\begin{cases} y = a_1 x + b_1, & y(x) < f(x) \\ y = a_2 x + b_2, & y(x) > f(x). \end{cases}$$

Пусть общая точка отрезков C имеет координаты (x_0, y_0). Эта точка принадлежит границе раздела сред.

Возвращаясь к выражению (1) для первой вариации функционала для разрывных (в смысле нарушения гладкости) экстремалей, отметим, что вариации δx и δy отвечают сдвигам точки, лежащей на трансверсали $y = f(x)$. Таким образом,

$$\delta y = f'(x)\delta x.$$

Пусть

$$\theta = \arctan(f'(x))|_{x=x_0},$$

$$\varphi_1 = \arctan(y'^{-}) = \arctan(a_1), \qquad \varphi_2 = \arctan(y'^{+}) = \arctan(a_2).$$

Тогда условие обращения в ноль внеинтегральных членов в выражении для первой вариации функционала (1) принимает вид

$$0 = \left(\frac{n_1\delta x}{\sqrt{1+y'^2}} + \frac{n_1 y'\delta y}{\sqrt{1+y'^2}}\right)|_{(x_0^-, y_0^-)} - \left(\frac{n_2\delta x}{\sqrt{1+y'^2}} + \frac{n_2 y'\delta y}{\sqrt{1+y'^2}}\right)|_{(x_0^+, y_0^+)} = \tag{6}$$
$$= (n_1\cos\varphi_1 + n_1\sin\varphi_1\tan\theta)\delta x|_{x=x_0} - (n_2\cos\varphi_2 + n_2\sin\varphi_2\tan\theta)\delta x|_{x=x_0}.$$

Окончательно полученное условие записывается в следующем виде:

$$[n_1\cos(\varphi_1 - \theta) - n_2\cos(\varphi_2 - \theta)]\,\frac{\delta x}{\cos\theta}|_{x=x_0} = 0. \tag{7}$$

Условие (7) ведет к следующему уравнению

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\cos(\varphi_2 - \theta)}{\cos(\varphi_1 - \theta)}. \tag{8}$$

Полученное соотношение представляет собой **закон преломления луча света в среде с изменением коэффициента преломления**.

2 Прямые методы вариационного исчисления.

Рассмотрим функционал вида

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} dx F(x, y, y').$$

Пусть для любой функции y, принадлежащей классу допустимых функций, выполняется неравенство

$$J[y] \geq a. \tag{9}$$

Пусть такде существует такая функция y_0, что

$$J[y_0] = a. \tag{10}$$

2.1 Метод Ритца.

Рассмотрим последовательность функций $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$. При этом

1) все элементы последовательности u_n принадлежат классу допустимых функций

2) последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ полна, то есть для любой функции y, принадлежащей классу допустимых функций, и любого $\varepsilon > 0$ существует число n и набор чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, такой что

$$||\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i - y|| < \varepsilon,$$

где норма понимается, например, в следующем смысле

$$\sup_{x\in[x_0,x_1]} |\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i - y| < \varepsilon.$$

Зафиксируем число n и подставим в функционал J линейную комбинацию $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$, принадлежащую классу допустимых функций:

$$J[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n] = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i'\right) dx.$$

Выберем набор коэффициентов $\{\tilde{\alpha}_i\}_{i=1}^{n}$ так, чтобы функция $J[y]$ принимала наименьшее значение (согласно условию (9) такой выбор возможен):

$$J[\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_n] = J_{min}^n.$$

Положим

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\alpha}_i u_i.$$

Расширим теперь набор базисных функций и рассмотрим расширенную линейную комбинацию $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \alpha_i u_i$. Выберем новый набор коэффициентов $\{\hat{\alpha}_i\}_{i=1}^{n+1}$ так, чтобы функция $J[y]$ принимала наименьшее значение J_{min}^{n+1}.

Очевидно,

$$J_{min}^{n+1} < J_{min}^n. \tag{11}$$

Последовательность значений

$$J_{min}^j, \quad j = n, n+1, n+2, \ldots$$

убывает и ограничена снизу, следовательно, имеет предел.

Замечание:

1). В силу полноты последовательности $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ справедливо следующее утверждение: $\lim\limits_{n\to\infty} J[y_n] = a$.

2). Для достаточно простых функционалов можно доказать, что

$$\exists \lim y_n, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0,$$

где y_0 определено в уравнении (10).

2.2 Метод Эйлера.

Рассмотрим функционал вида

$$J[y] = \int_{(x_0,y_0)}^{(x_n,y_n)} F(x, y, y')dx. \tag{12}$$

Соединим фиксированные точки $A(x_0, y_0)$ и $B(x_n, y_n)$ ломаной линией. Эта ломаная линия из n звеньев и будет описывать экстремаль в первом приближении. Параметрами фунционала теперь будут координаты промежуточных узлов ломаной.

На каждом участке ломаной при $x \in [x_i, x_{i-1}]$ ее уравнение принимает вид

$$y = y_{i-1} + \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}(x - x_{i-1}), \qquad \Delta y_i = y_i - y_{i-1}, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Таким образом, функционал записывается в следующем виде

$$J[x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_{n-1}, y_{n-1}] = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} F\left(x, y_{i-1} + \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}(x - x_{i-1}), \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right) dx. \tag{13}$$

Функция зависит от $2(n-1)$ переменных: координат промежуточных точек (x_1, y_1), $(x_1, y_1), \dots,$ (x_{n-1}, y_{n-1}). Выбираем их так, чтобы функция имела наименьшее значение, оставаясь при этом в классе допустимых функций. Так будет получено первое приближение к экстремали.

Следующий шаг реализации поиска экстремали заключается в том, что точки A и B фиксируются, а количество звеньев ломаной увеличивается на единицу. Поиск координат промежуточных узлов ломаной приводит к следующему приближению экстремали функционала.

Отметим, что реализация изложенного метода сводится к поиску многомерного (размерности $2n-2$) экстремума выражения (13), то есть к системе уравнений

$$\frac{\partial J}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

$$\frac{\partial J}{\partial y_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Как мы уже отмечали, точность метода увеличивается на каждом последующем шаге вычислений.

2.3 Пример 1.

Рассмотрим функционал

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} (py'^2 - qy^2\rho - 2\rho f y) dx. \tag{14}$$

Функция Лагранжа имеет вид

$$F(x, y, y') = p(x)y'^2 - q(x)y^2\rho(x) - 2\rho(x)f(x)y.$$

Построим уравнение Эйлера для функционала (14):

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2q\rho y - 2\rho f, \tag{15}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = -(2py')'. \tag{16}$$

Уравнение Эйлера получаем, вычитая уравнение (16) из уравнения (16):

$$-(py')' - q\rho y - f\rho = 0. \tag{17}$$

Заметим, что это уравнение отвечает краевой задаче вида

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho}(p(x)y')' - q(x)y = f(x), \\ y(x_0) = y(x_1) = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим разложение

$$y_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_n u_n(x). \tag{18}$$

Подставляя разложение (18) в функционал (14), получаем

$$J[a_1, a_2, \dots, a_n] = \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik} a_i a_k + \sum_{m=1}^{n} \beta_m a_m, \tag{19}$$

где введены обозначения

$$A_{ik} = \int_{x_0}^{x_1} (p(x)u_i' u_k' - \rho(x)q(x)u_i u_k) dx, \qquad \beta_m = -2\int_{x_0}^{x_1} \rho(x)f(x)u_m dx$$

Поиск экстремума функционала (19) сводится к решению линейной системы уравнений вида

$$\frac{\partial J}{\partial a_i} = 2\sum_{k=1, k\neq i} A_{ik} a_k + 2A_{ii}a_i + \beta_i = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

Эта система уравнений может быть записана в матричном виде следующим образом:

$$A\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{\beta}, \tag{20}$$

где

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix}, \qquad \vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \ldots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Разрешив систему (20) относительно вектора $\vec{a}$, можно восстановить экстремаль y_n (18).