1) Фурье-преобразование (продолжение II), 2) Вариационное исчисление. Лекция 25 марта.

27 марта 2020 г.

Утверждение: пусть функции $f, g \in L_2(\mathbb{R})$, то есть $\int_{\mathbb{R}} dx|f|^2 < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}} dx|g|^2 < \infty$. Пусть функции f и g являются также кусочно гладкими.

Тогда

$$\langle F[f], g\rangle = \langle f, F^{-1}[g]\rangle. \tag{1}$$

Доказательство:

$$\langle F[f], g\rangle = \int_{\mathbb{R}} dx F[f](x)\overline{g(x)} = \int_{\mathbb{R}} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda x} f(\lambda) d\lambda\right) \overline{g(x)} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} d\lambda f(\lambda) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dx e^{-i\lambda x} \overline{g(x)} = \int_{\mathbb{R}} d\lambda f(\lambda) \overline{F^{-1}[g](\lambda)} = \langle f, F^{-1}[g]\rangle. \blacksquare$$

Следствие (равенство Прсеваля):

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\lambda)|^2 d\lambda. \tag{2}$$

Доказательство:

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\lambda)|^2 d\lambda = \langle F[f], F[f]\rangle = \langle f, F^{-1}[F[f]]\rangle = \langle f, f\rangle = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx. \blacksquare \tag{3}$$

Пример. Уравнение теплопроводности.

Рассмотрим краевую задачу следующего вида:

$$\begin{cases} u'_t = a^2 u''_{xx} \\ u(x,0) = f(x) \end{cases} \tag{4}$$

Здесь a – постоянная теплопроводности. Мы ищем решение задачи о распределении температуры u в одномерном бесконечном стержне с течением времени t, если в начальный момент времени температура стержня задается функцией $f(x)$.

Пусть $u \in L_2(\mathbb{R}_x), \; u \in C^2(\mathbb{R}_x), \; u \in C^1(\mathbb{R}_t), f \in L_2(\mathbb{R}), \; f \in C^2(\mathbb{R})$.

Применим Фурье-преобразование по переменной x к задаче (4):

$$\begin{cases} \hat{u}'_t = a^2 (i\lambda)^2 \hat{u} \\ \hat{u}(\lambda, 0) = \hat{f}(\lambda) \end{cases} \tag{5}$$

Решим дифференциальное уравнение первого порядка для функции $\hat{u}(\lambda, t)$:

$$\frac{d\hat{u}}{\hat{u}} = -a^2 \lambda^2 dt,$$

$$\hat{u}(\lambda, t) = \hat{u}(\lambda, 0) e^{-a^2\lambda^2 t} = \hat{f}(\lambda) e^{-a^2\lambda^2 t}. \tag{6}$$

Применяя обратное Фурье-преобразование к уравнению (6), получим

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x} e^{-a^2\lambda^2 t} \hat{f}(\lambda) d\lambda.$$

Решение краевой задачи получено. ■

1 Вариационное исчисление.

1.1 Введение.

Сформулируем несколько задач из числа тех, постановка и решение которых легли в основу развития вариационного исчисления.

1) Задача о брахистохроне.

Брахистохрон – кривая наискорейшего спуска. Задача о ее нахождении была поставлена Бернулли в 1696 году: среди плоских кривых, соединяющих две данные точки A и B (B ниже A), лежащих в одной вертикальной плоскости, найти ту, двигаясь по которой под действием только силы тяжести, сонаправленной отрицательной полуоси oy, материальная точка из A достигнет B за кратчайшее время.

Очевидно, время движения может быть посчитано по формуле:

$$t = \int_A^B \frac{ds}{v}.$$

Здесь ds – элементарное перемещение вдоль траектории, а v – скорость, зависящая от точки траектории. Пусть траектория материальной точки на плоскости определяется как $y(x)$. Тогда

$$t = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{\sqrt{2gy(x)}} dx. \tag{7}$$

Скорость находится здесь из уравнения сохранения энергии $\frac{mv^2}{2} = mgy(x)$. Таким образом, задача свелась к определению траектории движения $y(x)$ при условии минимальности времени движения t.

2) Задача о наименьшей поверхности вращения.

Рассмотрим кривую $y(x)$ на плоскости, соединяющую точки A и B. Рассмотрим поверхность, которая возникает при вращении кривой относительно оси ox. Площадь такой поверхности определяется как

$$S = \int_A^B 2\pi y dl,$$

где dl – элементарная длина перемещения вдоль кривой $y(x)$. Тогда

$$S = 2\pi \int_{x_A}^{x_B} y(x)\sqrt{1+y'^2(x)} dx. \tag{8}$$

В данном случае задача сводится к определению уравнения кривой $y(x)$ при условии минимальности площади поверхности S.

1) Задача Плато.

Задача Плато – вопрос о существовании минимальной поверхности с заданной границей. Задача поставлена Ж.Лагранжем в 1760 году, названа в честь Ж.Плато, проводившего опыты с мыльными пленками. Она была решена независимо друг от друга в 1930 году Джесси Дугласом и Тибором Радо с определенными топологическими ограничениями. За свое решение Дуглас получил Филдсовскую премию 1936 года.

Как мы знаем, площадь S поверхности, определенной над областью D уравнением $z = z(x, y), \quad (x, y) \in D$, определятся следующим образом

$$S = \int\limits_D\int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy,$$

Задача состоит в определении уравнения поверхности $z = z(x, y)$, опирающейся на пространственный простой замкнутый контур Γ. Контур проецируется на границу области D в плоскости (x, y). Площадь поверхности должна быть минимальной.

2 Постановка простейшей вариационной задачи.

Функционал – это отображение, заданное на классе функций и сопоставляющее любой функции число.

$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$ – простейший интегральный функционал.

Простейшие вариационные задачи – это задачи на отыскание функции $y(x)$, удовлетворяющей краевым условиям: $y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1$ и доставляющей экстремум интегральному функционалу.

Пусть функция $y(x), \quad x \in [x_0, x_1]$ варьируется следующим образом: $y(x) \to y(x) + t\eta(x)$,

$$\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0, \quad t > 0.$$

Введем функцию $f(t) = J[y + t\eta]$. Ее вариация имеет вид

$$\delta f(t) = J[y + t\eta] - J[y].$$

Если функция y доставляет минимум (максимум) функционалу J, то функция $f(t)$ имеет при $t = 0$ минимум (максимум) для $\forall\eta$.

3 Основная лемма вариационного исчисления.

Пусть функция $g(x)$ непрерывна и для любой непрерывно дифференцируемой функции η, удовлетворяющей условиям $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$, верно равенство:

$$\int_{x_0}^{x_1} g(x)\eta(x)dx = 0. \tag{9}$$

Тогда $g(x) \equiv 0$.

Доказательство (от противного):

Пусть

$$\int_{x_0}^{x_1} g(x)\eta(x)dx = 0,$$

но

$$\exists \text{ точка } \quad C \in (x_0, x_1), \quad \text{такая, что} \quad g(C) > 0. \tag{10}$$

Поскольку функция g непрерывна, то $\exists\delta : \ g(x) > 0$ при $|x - C| < \delta$.

Рассмотрим

$$\eta(x) = \begin{cases} \left((x - C)^2 - \delta^2\right)^2, & |x - C| \le \delta \\ 0, & |x - C| > \delta \end{cases}$$

В этом случае

$$\int_{x_0}^{x_1} g(x)\eta(x)dx = \int\limits_{C-\delta}^{C+\delta} g(x)\left((x - C)^2 - \delta^2\right)^2 > 0.$$

Мы приходим к противоречию, а именно: нашлась некоторая функция $\eta(x)$, такая, что интеграл (9) отличен от нуля. Таким образом, исходное предположение (10) неверно. Лемма доказана. ■