

Геометрические вопросы теории дифференциальных уравнений.

Лекция 19 мая.

20 мая 2020 г.

1 Автономные системы. (Продолжение)

1.1 Случай комплексных собственных чисел матрицы A

Если собственные числа матрицы A комплексные (см. предыдущую лекцию), то в силу вещественности матрицы A будем иметь комплексно сопряженные корни $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$.

Пусть $\vec{a} \pm i\vec{b}$ – соответствующие собственные векторы (\vec{a} и \vec{b} – вещественные векторы). Тогда

$$A\vec{a} = \alpha\vec{a} - \beta\vec{b}, \quad A\vec{b} = \beta\vec{a} + \alpha\vec{b}. \quad (1)$$

Это видно из следующих соображений:

$$A(\vec{a} + i\vec{b}) = (\alpha + i\beta)(\vec{a} + i\vec{b}) = \alpha\vec{a} - \beta\vec{b} + i(\beta\vec{a} + \alpha\vec{b}). \quad (2)$$

Отсюда следует система уравнений (1) для вещественной и мнмой частей равенства (2).

Это означает, что в базисе из векторов \vec{a} и \vec{b} матрица A примет вид:

$$B = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad A = SBS^{-1}. \quad (3)$$

Здесь S – матрица, столбцы которой составляют векторы \vec{a} и \vec{b} .

Замена $\vec{z} = S^{-1}\vec{y}$ приведет нас (см. предыдущую лекцию) к уравнению

$$\vec{z}' = B\vec{z}, \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Удобно ввести полярные координаты

$$u = r \cos \varphi, \quad v = r \sin \varphi.$$

Тогда система (4)

$$\begin{cases} u' = \alpha u + \beta v \\ v' = -\beta u + \alpha v \end{cases} \quad (5)$$

примет вид

$$\begin{cases} r' = \alpha r \\ \varphi' = -\beta \end{cases} \quad (6)$$

Чтобы убедиться в этом достаточно записать систему (5) как

$$\begin{cases} r' \cos \varphi - r \sin \varphi \varphi' = \alpha r \cos \varphi + \beta r \sin \varphi, \\ r' \sin \varphi + r \cos \varphi \varphi' = -\beta r \cos \varphi + \alpha r \sin \varphi. \end{cases} \quad (7)$$

Домножая первое из уравнений (7) на $\cos \varphi$, а второе - на $\sin \varphi$ и складывая их, получим первое из уравнений (6). Аналогично, домножая первое из уравнений (7) на $\sin \varphi$, а второе - на $\cos \varphi$ и вычитая первое уравнение из второго, получим второе из уравнений (6).

Решение системы уравнений (6)

$$\begin{cases} r = r_0 e^{\alpha t} \\ \varphi = -\beta t + \varphi_0 \end{cases} \quad (8)$$

при $\alpha \neq 0$ является спиралью (см. Рис. 4)

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 e^{\alpha t} \cos(\varphi_0 - \beta t) \\ r_0 e^{\alpha t} \sin(\varphi_0 - \beta t) \end{pmatrix}.$$

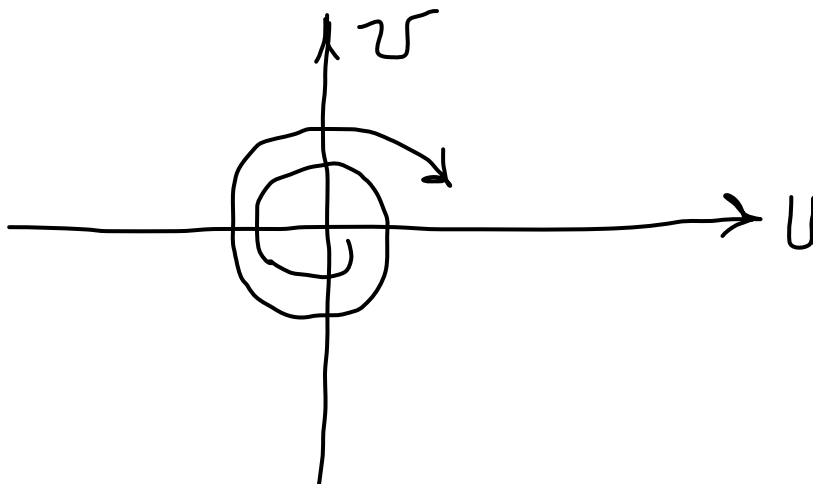


Рис.4 Фокус

Особая точка при этом называется **фокусом**. Закручивается или раскручивается спираль (с течением времени) - определяется знаком вещественной части собственных чисел (то есть знаком α). Если $\alpha < 0$, спираль закручивается и **фокус называется устойчивым**. Направление движения (по или против часовой стрелке) - определяется знаком β . Если корни чисто мнимые, вместо спиралей получаем семейство окружностей с центром в нуле. Особая точка при этом так и называется **центром**.

1.2 Случай кратных собственных чисел

Остается разобрать случай кратного собственного числа λ матрицы A . Если матрица может быть диагонализирована (то есть существует базис из собственных векторов), то верны те же рассуждения, которые относились к случаю различных вещественных значений одного знака. В противном случае в жордановом базисе матрица A примет вид

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

В соответствующих координатах u, v система запишется в виде

$$\begin{cases} u' = \lambda u + v, \\ v' = \lambda v. \end{cases}$$

Решение дается равенствами

$$\begin{cases} u = (C_1 t + C_2) e^{\lambda t}, \\ v = C_1 e^{\lambda t}. \end{cases}$$

Качественно опять фазовые кривые выглядят также, как в случае вещественных различных корней одного знака, то есть особая точка будет являться **устойчивым узлом** в случае $\lambda < 0$ и **неустойчивым узлом** при $\lambda > 0$.

Возвращаясь на фазовую плоскость x, y , мы получим принципиально те же фазовые портреты (с точностью до линейных искажений). Таким образом, на плоскости в случае **простых** (то есть определитель соответствующей матрицы не равен нулю) линейных систем дифференциальных уравнений имеется четыре типа особых точек: **узел, седло, фокус и центр**.

Эта классификация сохраняется и для нелинейных систем. Имеет место теорема о линеаризации, утверждающая, что если линеаризованная система в окрестности особой точки является простой, то фазовый портрет нелинейной системы в окрестности рассматриваемой особой точки качественно эквивалентен фазовому портрету линеаризованной системы, если только особая точка не является центром. Доказательство этой теоремы выходит за рамки данного курса. Ограничимся лишь только замечанием, что в случае узла или фокуса устойчивость особой точки (нелинейной системы) будет определяться устойчивостью особой точки соответствующего линеаризованного уравнения: устойчивость особой точки в нуле для системы

$$\begin{cases} x' = f(x, y), \\ y' = g(x, y), \end{cases}$$

где

$$\begin{cases} f(x, y) = ax + by + \varphi(x, y), & \varphi(x, y) \underset{(x, y) \rightarrow (0, 0)}{=} o(|x| + |y|), \\ g(x, y) = cx + dy + \psi(x, y), & \psi(x, y) \underset{(x, y) \rightarrow (0, 0)}{=} o(|x| + |y|), \end{cases}$$

определяется устойчивостью особой точки (узла или фокуса) линеаризованного уравнения

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy. \end{cases}$$

1.3 Понятие о предельном цикле.

В предыдущем параграфе мы рассматривали решения автономных систем на плоскости только в окрестности особых точек (имеются в виду, конечно, нелинейные системы). Во многих задачах бывает нужна информация о глобальных решениях. Выяснение глобальных свойств решений является задачей значительно более сложной. Достаточно заметить, что две нелинейные системы могут иметь одинаковое число особых точек одинакового характера (качественно эквивалентных) и одинаково расположенных, но при этом в целом фазовые портреты этих систем не будут качественно эквивалентными. Одним из интересных проявлений глобальных фазовых портретов являются **предельные циклы** - изолированные замкнутые орбиты, то есть такие замкнутые фазовые траектории, в некоторой окрестности которых нет других замкнутых траекторий. Примером является система, имеющая в полярных координатах вид

$$\begin{cases} r' = 1 - r^2, \\ \varphi' = 1. \end{cases}$$

Предельным циклом такой системы является окружность $r = 1$.

Имеются глубокие результаты, описывающие условия появления предельных циклов (теория Пуанкаре-Бендиксона). Например, если некоторая компактная область в фазовой плоскости обладает тем свойством, что любая траектория с началом в этой области остается в области во все последующие моменты времени, и если в этой области нет неподвижных точек, то в рассматриваемой области существует предельный цикл.

Мы остановимся на доказательстве одного простого критерия, гарантирующего отсутствие предельных циклов.

Теорема: пусть в односвязной области D фазовой плоскости функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ непрерывно дифференцируемы, и сумма

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$$

знакоопределенна. Тогда в области D нет замкнутых траекторий системы

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y). \end{cases}$$

Доказательство: Пусть кривая Γ является замкнутой траекторией для рассматриваемой системы. Тогда на ней

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f}{g} \quad \rightarrow \quad gdx - fdy = 0, \quad (x, y) \in \Gamma.$$

По формуле Грина

$$\int_{\Gamma} gdx - fdy = - \int_{D_{\Gamma}} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy,$$

где D_{Γ} - область, ограниченная орбитой Γ . Мы пришли к противоречию, поскольку левая часть равенства равна нулю, в то время как правая - знакоопределенна. Например, уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay + \tilde{f}(x)}{bx + \tilde{g}(y)}$$

не имеет предельных циклов, если $a + b \neq 0$. Действительно,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = b + a.$$

■