Изопериметрическая задача. Множители Лагранжа. Лекция 14 апреля.

14 апреля 2020 г.

1 Постановка задачи.

Рассмотрим гладкую кривую на плоскости. Пусть эта кривая описывается уравнением

$$y = y(x) \in C^2[x_0, x_1].$$

Пусть $y \geq 0, \quad x \in [x_0, x_1]$. Площадь под кривой определяется как

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} y dx. \tag{1}$$

Пусть длина кривой фиксирована и равна l, т.е.

$$J_1[y] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx = l. \tag{2}$$

Рассмотрим следующую **Задачу**:
Найти уравнение границы области с максимальной площадью при фиксированной длине границы.

Сформулируем эту задачу в общем виде следующим образом:
Найти экстремум функционала

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \tag{3}$$

при условиях:

$$J_1[y] = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y') dx = C_1 \tag{4}$$

$$y(x_0) = y_0, \qquad y(x_1) = y_1. \tag{5}$$

Решение:

Пусть $y = y(x)$ – экстремаль. Рассмотрим пробные функции $\eta_1, \eta_2 \in C^1[x_0, x_1]$, удовлетворяющие условиям

$$\eta_1(x_0) = \eta_1(x_1) = \eta_2(x_0) = \eta_2(x_1) = 0.$$

Введем также две функции двух переменных:

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = J[y + \alpha_1\eta_1 + \alpha_2\eta_2], \qquad g(\alpha_1, \alpha_2) = J_1[y + \alpha_1\eta_1 + \alpha_2\eta_2]. \tag{6}$$

Сформулируем следующее **Утверждение:**
Существуют ненулевые постоянные λ_0 и λ_1, такие что:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1}(\lambda_0 f + \lambda_1 g)\Big|_{\alpha_1=\alpha_2=0} = \frac{\partial}{\partial \alpha_2}(\lambda_0 f + \lambda_1 g)\Big|_{\alpha_1=\alpha_2=0} = 0. \tag{7}$$

Иначе говоря, существует такая невырожденная линейная комбинация двух функций двух переменных, которая имеет локальный экстремум в начале координат. Утверждение становится наглядным, если представить, что функции f и g описывают некоторые поверхности в $\mathbb{R}^3$, заданные над областью в плоскости (α_1, α_2).

Рассмотрим отдельно первое слагаемое:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1} f(\alpha_1,\alpha_2)\Big|_{\alpha_1=\alpha_2=0} = \frac{\partial}{\partial\alpha_1}\int_{x_1}^{x_1} F(x, y+\alpha_1\eta_1+\alpha_2\eta_2, y'+\alpha_1\eta_1'+\alpha_2\eta_2')\Big|_{\alpha_1=\alpha_2=0} dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta_1 + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta_1'\right)dx = \int_{x_1}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta_1 dx.$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_2} f(\alpha_1,\alpha_2)\Big|_{\alpha_1=\alpha_2=0} = \int_{x_1}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta_2 + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta_2'\right)dx = \int_{x_1}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta_2 dx.$$

Аналогичные вычисления проведем для функции g. Подставим в уравнение (7) полученные соотношения:

$$\int_{x_1}^{x_1} dx\left[\lambda_0\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \lambda_1\left(\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\right]\eta_1 = 0, \tag{8}$$

$$\int_{x_1}^{x_1} dx\left[\lambda_0\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \lambda_1\left(\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\right]\eta_2 = 0, \tag{9}$$

1.1 Пусть $y(x)$ не является экстремалью функционала J_1

Пусть $y(x)$ не является экстремалью функционала J_1 (4). Тогда $\lambda_0 \neq 0$. Поделим уравнение (9) на λ_0. Из уравнения (9) получаем, что

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = -\frac{\int_{x_1}^{x_1} dx\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta_2 dx}{\int_{x_1}^{x_1} dx\left(\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\eta_2 dx} \tag{10}$$

Таким образом, отношение $\lambda \equiv \frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ не зависит от η_1. Тогда из уравнения (8) в силу Основной Леммы вариационного исчисления получаем

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \lambda\left(\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial G}{\partial y'}\right) = 0. \tag{11}$$

Наконец, введем расширенную функцию Лагранжа H

$$H = F + \lambda G,$$

где λ – некоторая постоянная. Эта постоянная λ (как и функция $\lambda(x)$ в задаче Лагранжа) называется **множителем Лагранжа**.

В этих терминах уравнение (11) может быть переписано следующим образом:

$$\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial H}{\partial y'} = 0. \tag{12}$$

Мы получили необходимое условие экстремума в случае изопериметрической задачи. ■

1.2 Пусть $y(x)$ является экстремалью функционала J_1

Пусть $y(x)$ является экстремалью функционала J_1 (4).

Тогда выполняется уравнение

$$\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial G}{\partial y'} = 0. \tag{13}$$

В этом случае уравнение (8) принимает вид

$$\lambda_0\int_{x_1}^{x_1} dx\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta_1 dx = 0. \tag{14}$$

Считаем, что $\lambda_0 \neq 0$ (в противном случае задача теряет смысл). Тогда по Основной Лемме вариационного исчисления

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \tag{15}$$

Это уравнение равносильно уравнению (12) при условии (13). ■

2 Пример 1. Задача о максимальной площади.

Вернемся к задаче о максимальной площади, рассмотренной в начале лекции.

Рассмотрим функционал

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} y dx, \quad y(x_0) = y(x_1) = 0, \tag{16}$$

$$J_1[y] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx = l.$$

Решение.

Составим обобщенную функцию Лагранжа

$$H = y + \lambda\sqrt{1 + y'^2}.$$

Составленная расширенная функция Лагранжа не зависит от x. Воспользуемся первым интегралом уравнения Эйлера:

$$H - y' H_{y'} = y + \lambda\sqrt{1 + y'^2} - y'\lambda\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = y + \frac{\lambda}{\sqrt{1 + y'^2}} = C.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{dy}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{(y-C)^2} - 1}} = \pm dx.$$

Иначе говоря,

$$\frac{dy(y - C)}{\sqrt{\lambda^2 - (y - C)^2}} = \pm dx.$$

Интегрируя полученное уравнение, получаем

$$-\sqrt{\lambda^2 - (y - C)^2} = \pm x + C_1.$$

Окончательно получаем уравнение окружности

$$(x - C_2)^2 + (y - C)^2 = \lambda^2. \tag{17}$$

Неизвестные постоянные C, C_2, λ должны быть фиксированы с помощью граничных условий и условия связи

$$y(x_0) = 0, \qquad y(x_1) = 0,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx = l.$$

Количство условий равно количеству неизвестных.

3 Замечания.

Рассмотрим изопериметрическую задачу с несколькими связями.

Мы исследуем экстремали функционала

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \tag{18}$$

при наличии дополнительных связей вида

$$J_j[y] = \int_{x_0}^{x_1} G_j(x, y, y') dx = C_j, \quad j = 1, 2, \ldots, M \tag{19}$$

и граничных условий

$$y(x_0) = y_0, \qquad y(x_1) = y_1.$$

Решение задачи связано с построением расширенной функции Лагранжа

$$H = F + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j G_j, \tag{20}$$

где набор постоянных $\{\lambda_j\}_{j=1}^{M}$ – набор множителей Лагранжа.

Уравнение Эйлера вида

$$\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial H}{\partial y'} = 0 \tag{21}$$

является необходимым условием существования экстремали.